Algoritmy průchodů grafem

doc. Mgr. Jiří Dvorský, Ph.D.

Katedra informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB – TU Ostrava

Prezentace ke dni 12. února 2020

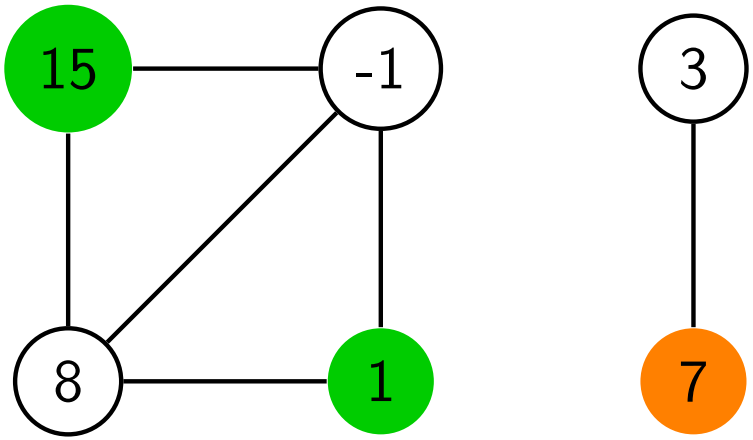


Osnova přednášky

Algoritmy průchodů grafem

- Prohledávání grafu do šířky
- Prohledávání grafu do hloubky
- Aplikace
  - Hledání cesty v bludišti
  - Počítačová grafika – vyplňování oblasti

Motivační úlohy



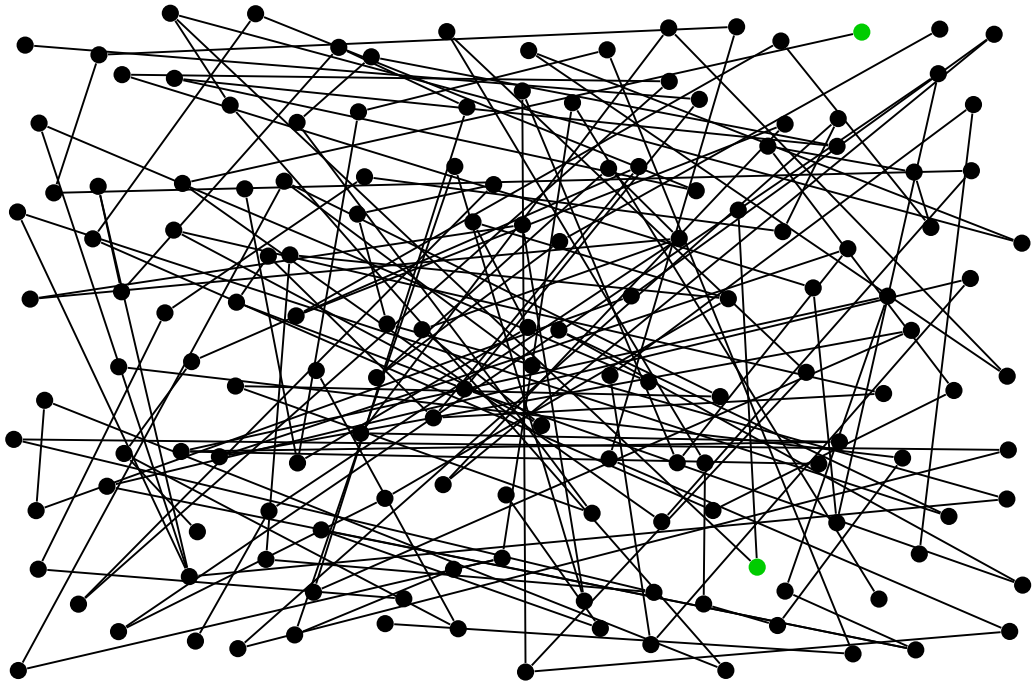
Možné otázky

1. Existuje cesta mezi zelenými vrcholy?
2. Existuje cesta mezi některým zeleným vrcholem a oranžovým vrcholem?
3. Kolik je v grafu zelených vrcholů?
4. Jaká je průměrná hodnota ve vrcholu?

Řešení!? Řešení je přece ihned vidět!

- Co však s grafem o enormním počtu vrcholů? Tisíce, miliony vrcholů.
- Graf má sice jen několik vrcholů, ale potřebuji jich zpracovat několik desítek tisíc. Vše prohlížet ručně!?

Motivační úlohy – aneb co s tímto grafem!?



Dokážete to?

1. Kolik má graf vrcholů?
2. Kolik má hran?
3. Existuje cesta mezi zelenými vrcholy?
4. Existuje v grafu cyklus?
5. Je tento graf souvislý?

Hledané algoritmy

- systematické navštívení všech vrcholů grafu – iterátor a jako důsledek
- vyhledání cesty mezi dvěma zadanými vrcholy či
- nalezení souvislých komponent grafu.

Prohledávání grafu

- Základním účelem prohledávání grafů je zjišťování dostupnosti – do kterých vrcholů se lze ze zadaného počátečního vrcholu dostat.
- Dalším cílem je vykonání nějaké akce s každým vrcholem grafu.
- Z hlediska datových struktur lze prohledávání grafu chápat jako iterátor na grafu.

Prohledávání grafu

- Je-li graf přehledně nakreslen a není příliš rozsáhlý, lze tyto úlohy vyřešit „pouhým pohledem“.
- Problém nastává s rozsáhlými grafy.
- A další problém nastává v případě počítačového zpracování – je nutné vyvinout algoritmus.
- Uvedeme si tři způsoby prohledávání:
  1. značkování vrcholů,
  2. prohledávání do šířky a
  3. prohledávání do hloubky.

Značkování vrcholů

- Vrcholům přiřazujeme značky.
- Má-li vrchol značku, znamená to, že do něj vede nějaká cesta z daného výchozího vrcholu s.
- Algoritmus skončí po $|V| - 1$ opakováních kroků 2 a 3.
- Po ukončení algoritmu budou označkovány všechny vrcholy do nichž vede cesta z vrcholu s.

Algoritmus značkování vrcholů

1. **Inicializace**: Označkujeme vrchol s, ostatní vrcholy jsou beze značek.
2. **Výběr hrany**: Vybereme libovolnou hranu e, jejíž jeden vrchol má značku a druhý vrchol nikoli. Pokračujeme podle kroku 3. Jestliže taková hrana neexistuje, algoritmus končí.
3. **Značkování**: Označkujeme dosud neoznačkovaný vrchol hrany e a pokračujeme v algoritmu podle kroku 2.

Značkování vrcholů - praktická realizace

- Nejjednodušší je opakovaně procházet seznam hran grafu, pro každou hranu testovat, zda ji lze použít pro označkování dalšího vrcholu.
- Nevýhoda spočívá v opakování průchodu seznamem hran.
- Lze vylepšit seznamem vrcholů, které čekají na zpracování – zpracování spočívá v označkování všech vrcholů kam se lze dostat hranami ze zpracovávaného vrcholu.
- Odpadá nutnost procházet celý seznam hran.
- Prohledávání do šířky a do hloubky v podstatě závisí na tom, jak budeme tento pomocný seznam organizovat.

Prohledávání grafu do šířky

- anglicky Breadth-first Search (BFS),
- asi nejjednodušší algoritmus na prohledávání grafu,
- je základem pro mnoho dalších algoritmů – Jarníkův (Primův) výpočet minimální kostry grafu, Dijkstrův algoritmus nalezení nejkratší cesty,

Idea algoritmu

1. nejprve označkujeme vrchol s,
2. pak označkujeme všechny jeho sousedy,
3. pak sousedy sousedů a tak dále ...

Algoritmus tedy můžeme představit tak, že se grafem rozlévá pomyslná tekutina, která postupně, v jakýchsi vlnách, zaplavuje dostupnou část grafu.

Prohledávání grafu do šířky

- Každému vrcholu přiřadíme jeden ze tří možných stavů:
  - unknown – vrchol ještě nebyl navštíven, algoritmus k němu ještě nedošel.
  - discovered – vrchol byl již objeven, čeká ve frontě na zpracování.
  - finished – zpracování vrcholu bylo dokončeno.
- Každý vrchol je počátku ve stavu unknown, pak přejde do stavu discovered a nakonec se ocitne ve stavu finished.
- Vrcholy ve stavu discovered tvoří hranici mezi vrcholy ve stavu unknown a finished. Tato hranice se neustále rozšiřuje.

Stav vrchol u	Možné stavy jeho sousedů		
unknown	unknown	discovered	
discovered	unknown	discovered	finished
finished		discovered	finished

Prohledávání grafu do šířky

- Graf $G = (V, E)$
- Počáteční vrchol s, $s \in V$.
- Pomocné datové struktury:
  - *state* – tabulka se stavy všech vrcholů,
  - π – o každý vrchol u je v tabulce π uložen jeho předchůdce, pokud neexistuje obsahuje tabulka hodnotu nothing,
  - d – tabulka obsahuje pro každý vrchol jeho vzdálenost od vrcholu s,
  - Q – fronta vrcholů ve stavu discovered.

Algoritmus průchodu grafem do šířky

Input : Graf $G(V, E)$, počáteční vrchol $s \in V$
Output: BF-strom

```
20 foreach u ∈ V/{s} do
21 |   state [u] ← unknown;
22 |   d [u] ← ∞;
23 |   π [u] ← nothing;
24 end
25 Q ← ∅;
26 state [s] ← discovered;
27 d [s] ← 0;
28 π [s] ← nothing;
29 Enqueue(Q, s);
```

Algoritmus průchodu grafem do šířky (pokrač.)

```
30 while Q ≠ ∅ do
31 |   u ← Dequeue(Q);
32 |   foreach v ∈ Adj(G, u) do
33 |   |   if state [v] = unknown then
34 |   |   |   state [v] ← discovered;
35 |   |   |   d [v] ← d [u] + 1;
36 |   |   |   π [v] ← u;
37 |   |   |   Enqueue (Q,v);
38 |   |   end
39 |   end
40 |   state [u] ← finished;
41 end
```

Animace průchodu grafem do šířky – legenda

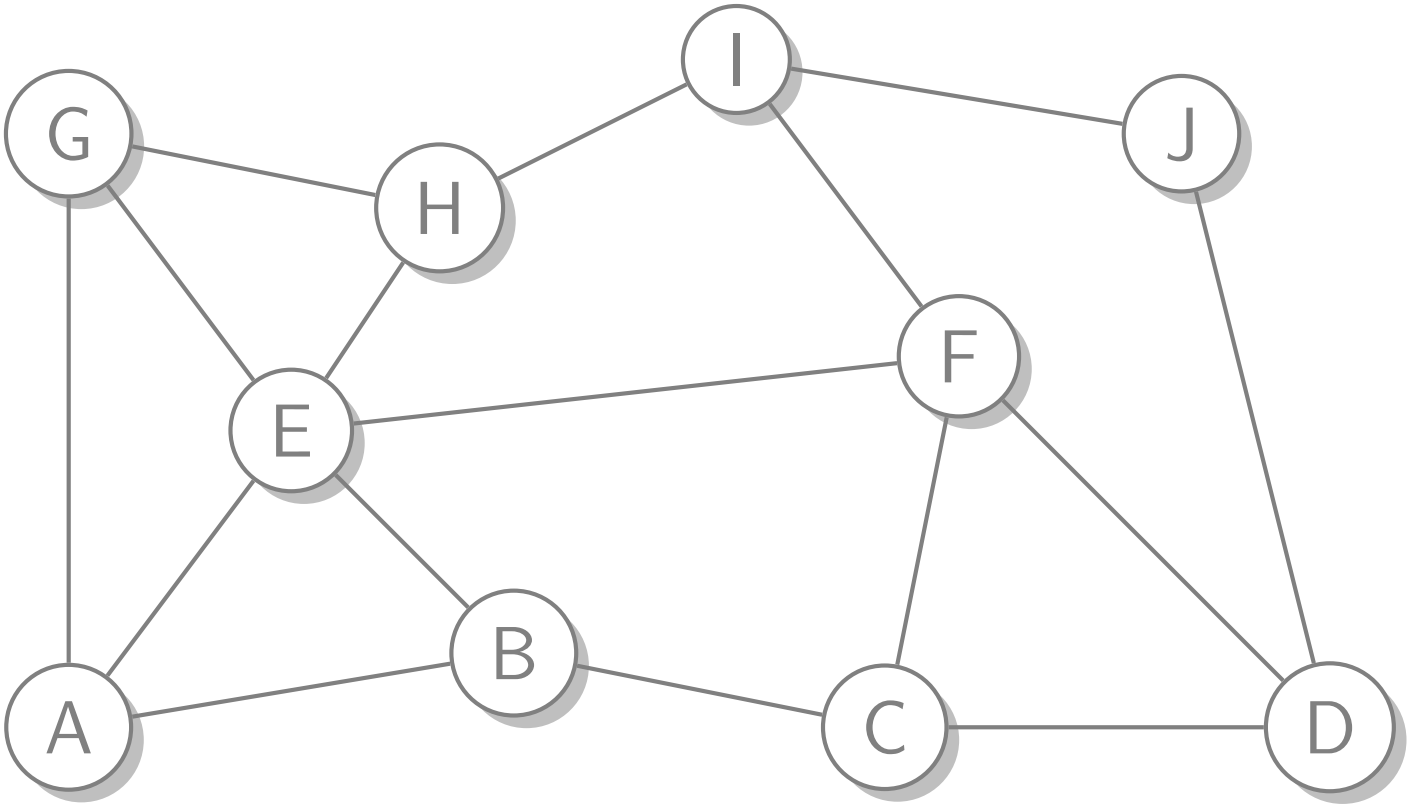
Vrcholy grafu:

šedá	vrchol ve stavu unknown
žlutá	vrchol ve stavu discovered
červená	právě zpracovávaný vrchol
modrá	vrchol ve stavu finished

Hrany grafu:

šedá	hrana mezi vrcholy ve stavu unknown nebo hrana nepatřící do BF-stromu
žlutá	hrana incidentní s vrcholy ve stavu discovered
červená	hrana incidentní s právě zpracovávaným vrcholem
modrá	hrana mezi vrcholy ve stavu finished

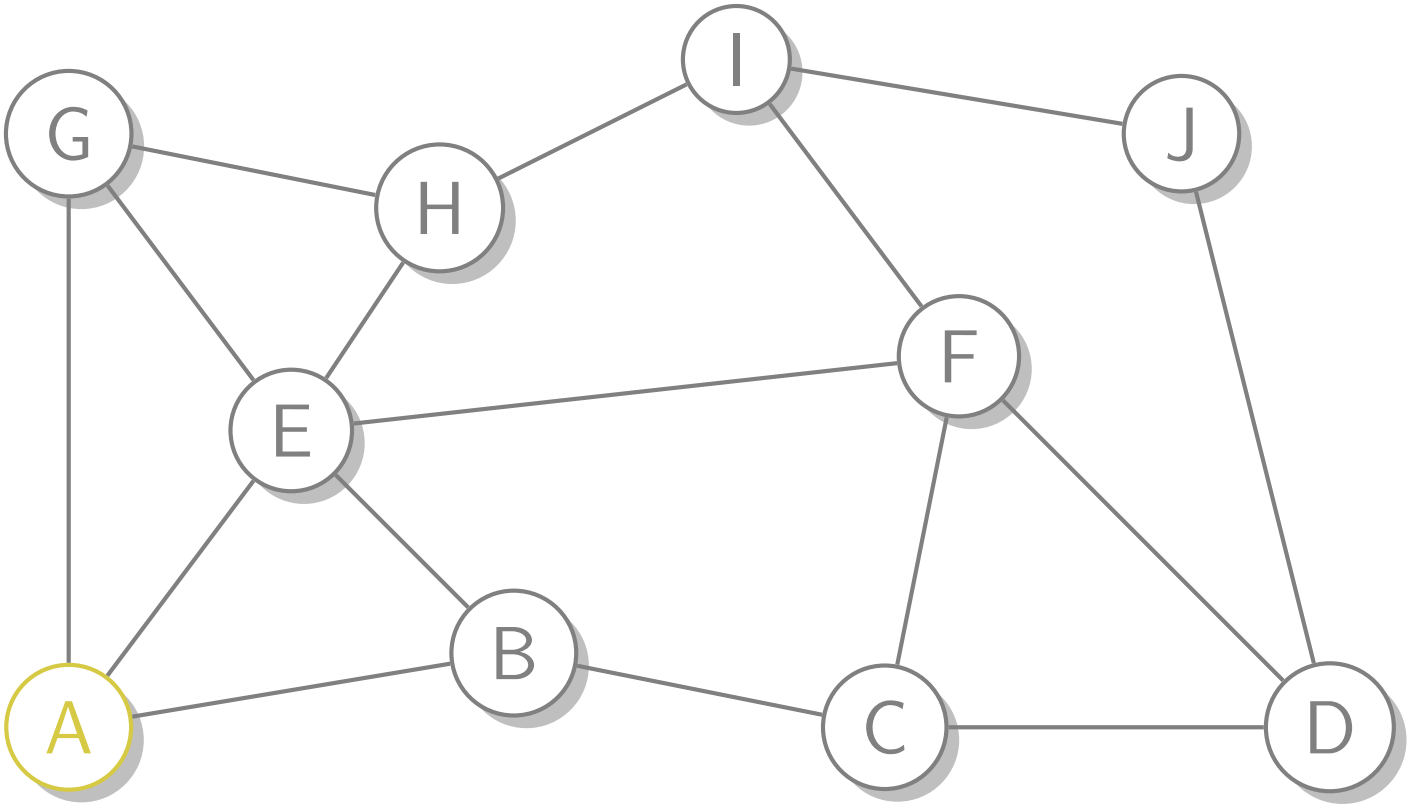
Průchod grafem do šířky, krok 1



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	∞	/
B	∞	/
C	∞	/
D	∞	/
E	∞	/
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q [ ]

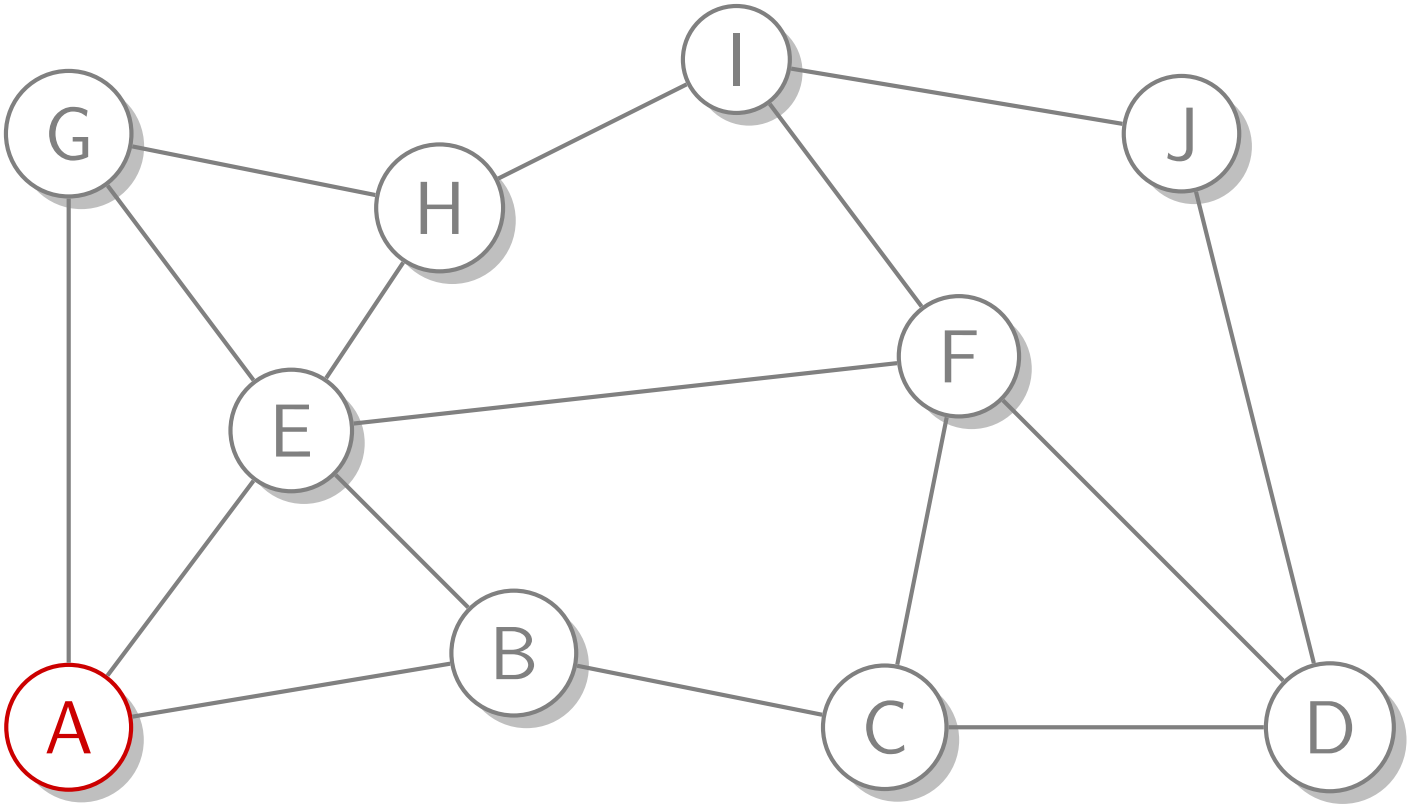
Průchod grafem do šířky, krok 2



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	∞	/
C	∞	/
D	∞	/
E	∞	/
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | A |

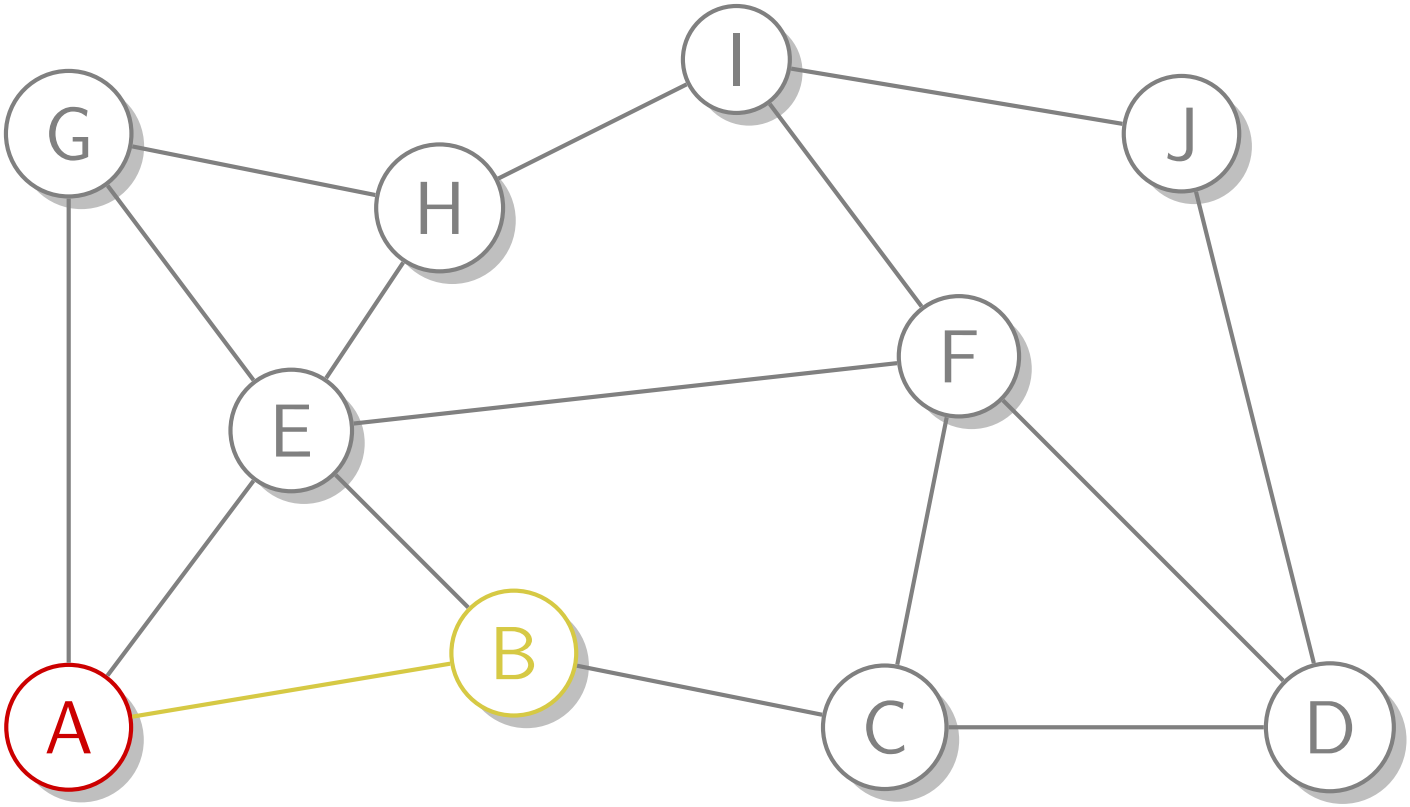
Průchod grafem do šířky, krok 3



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	∞	/
C	∞	/
D	∞	/
E	∞	/
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q [ ]

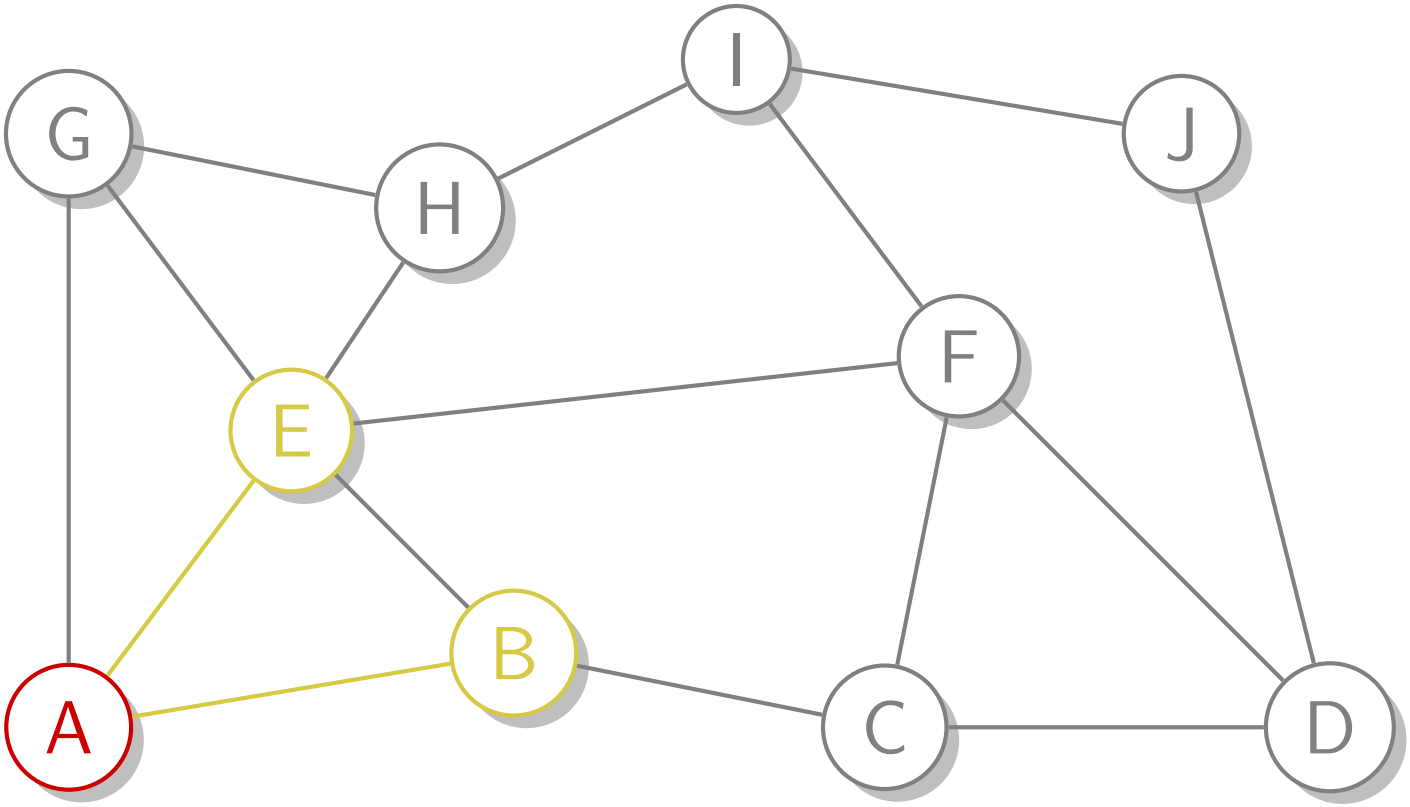
Průchod grafem do šířky, krok 4



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	∞	/
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | B |

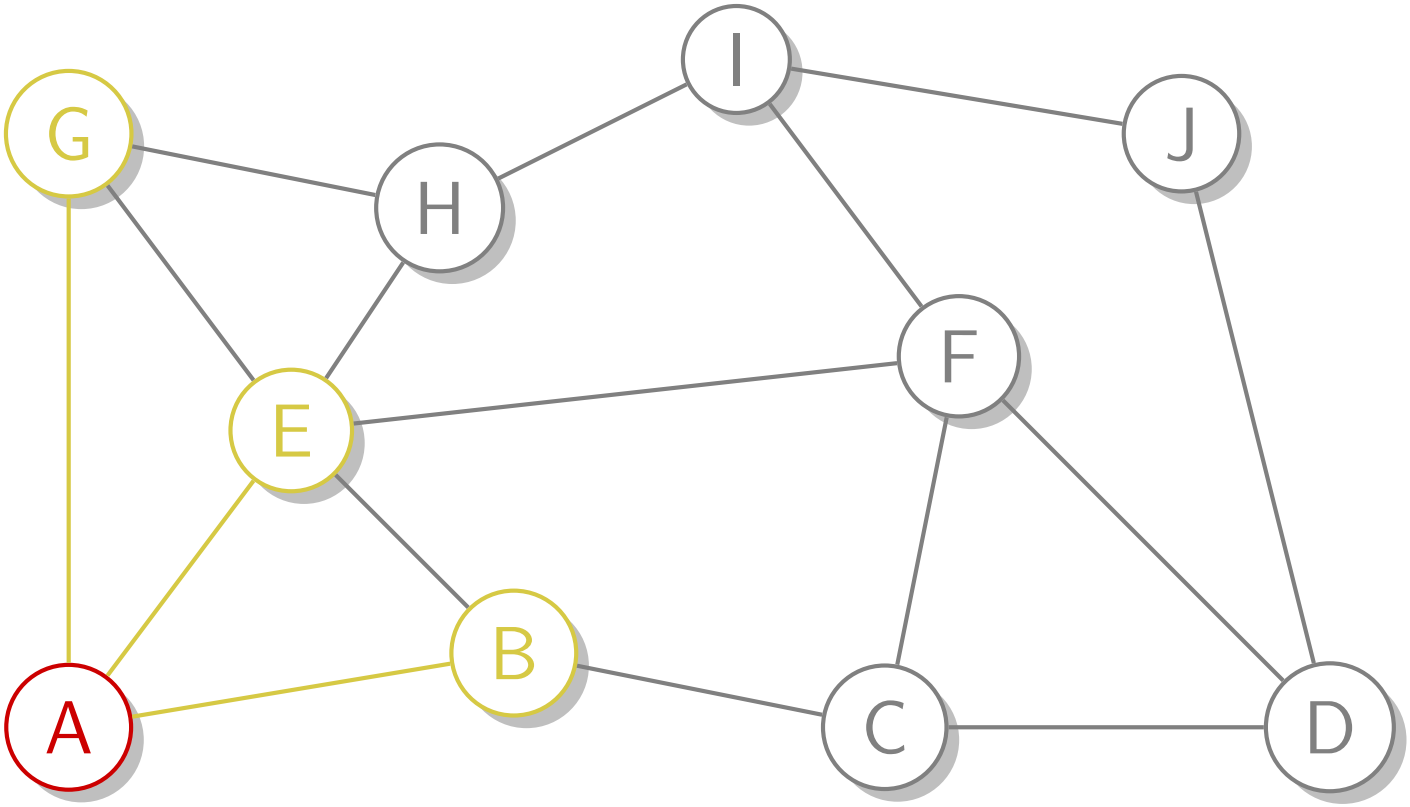
Průchod grafem do šířky, krok 5



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | B | E |

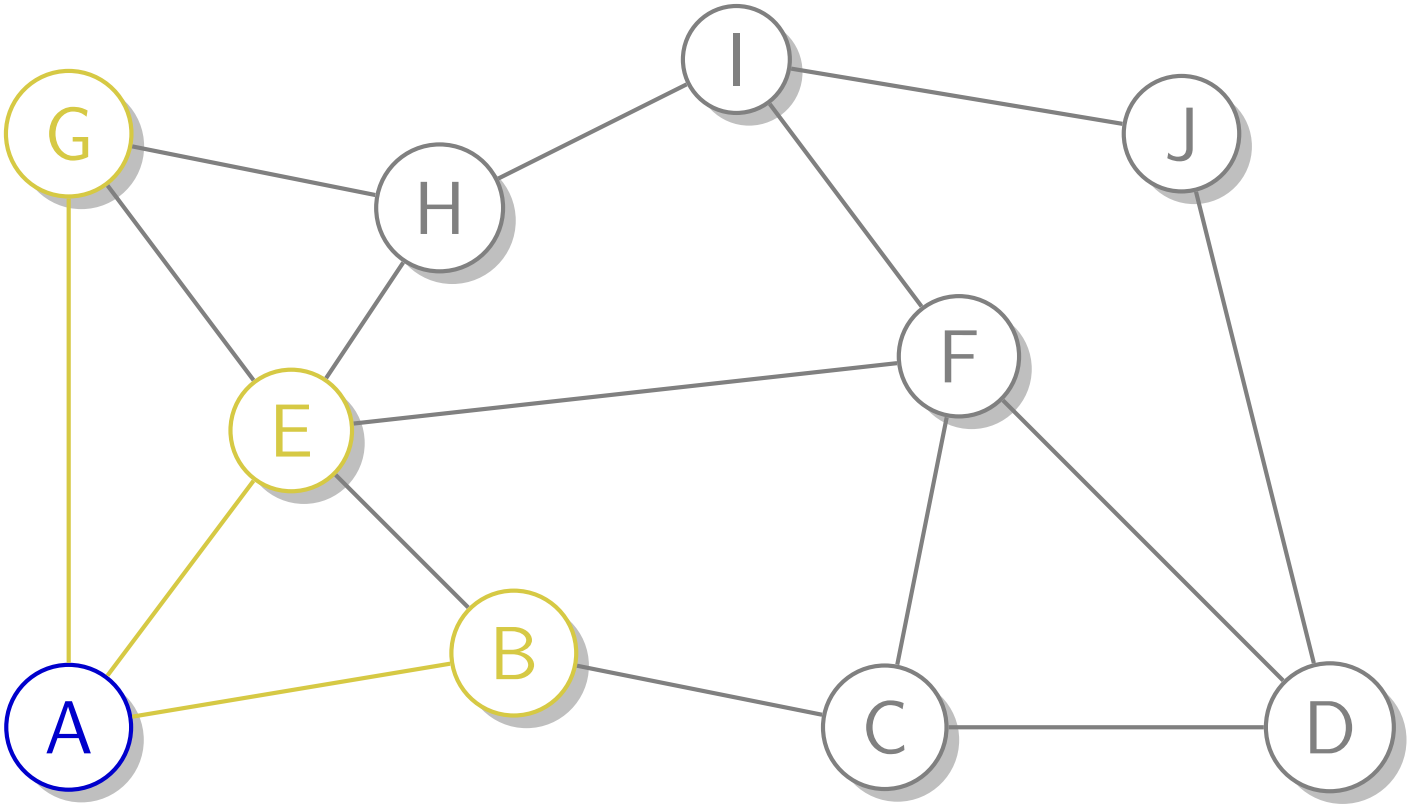
Průchod grafem do šířky, krok 6



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | B | E | G |

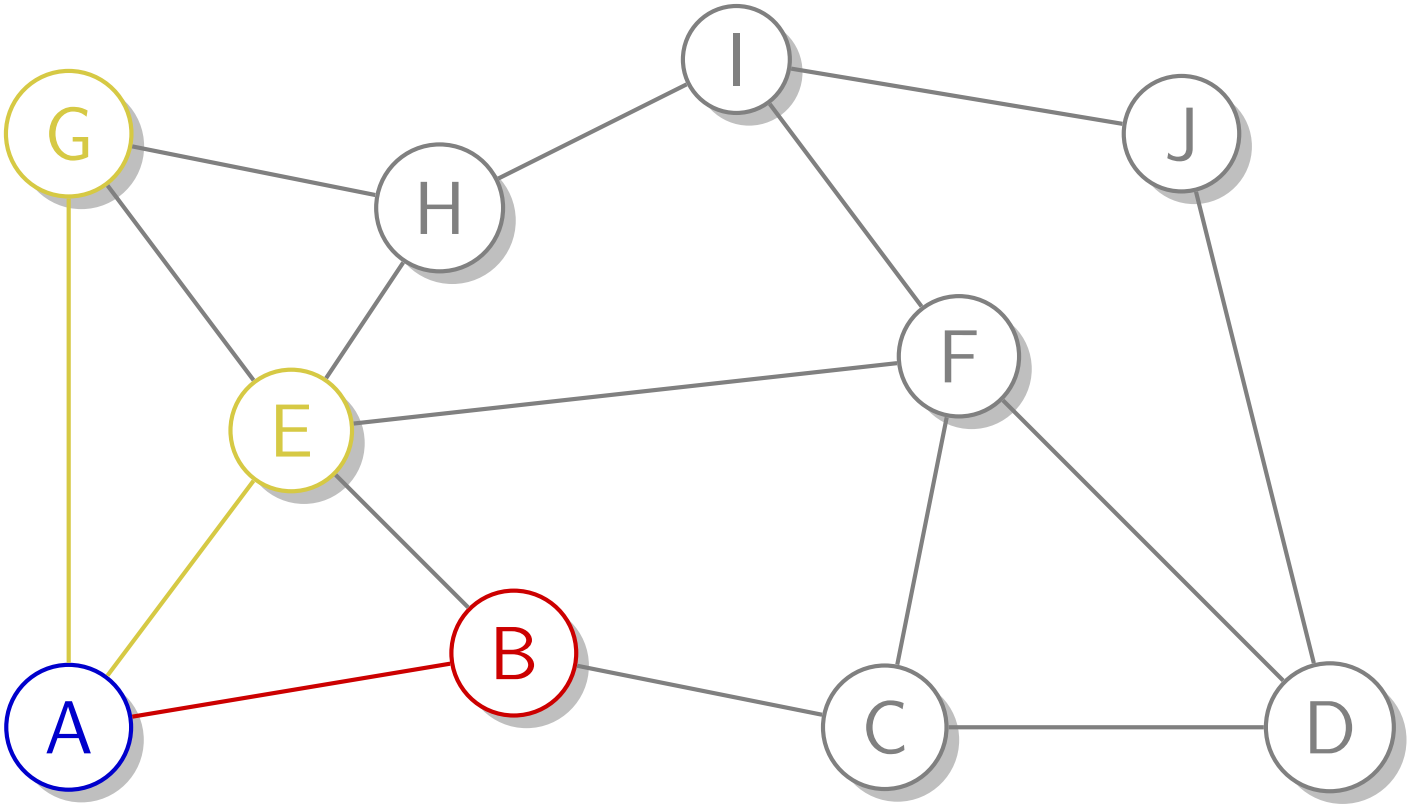
Průchod grafem do šířky, krok 7



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | B | E | G |

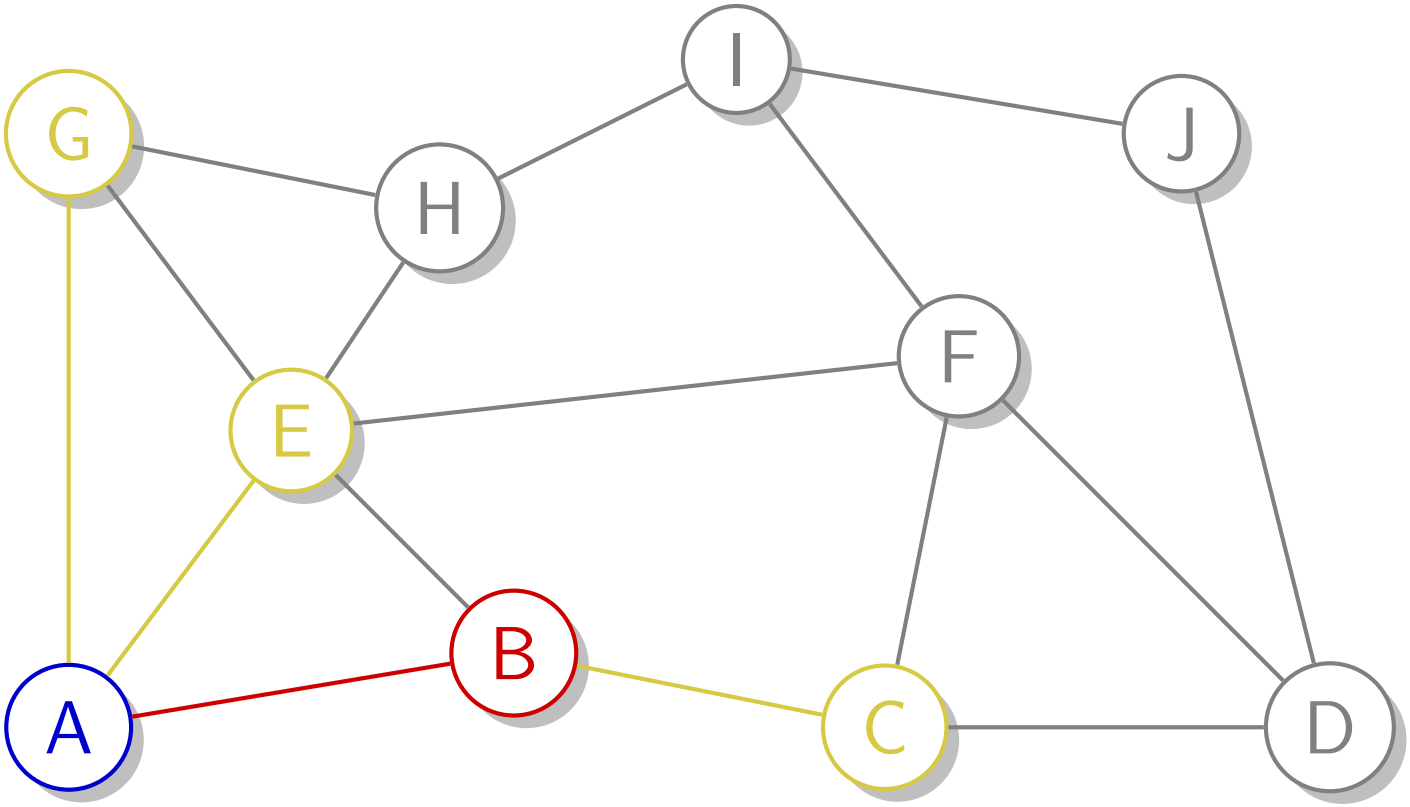
Průchod grafem do šířky, krok 8



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | E | G |

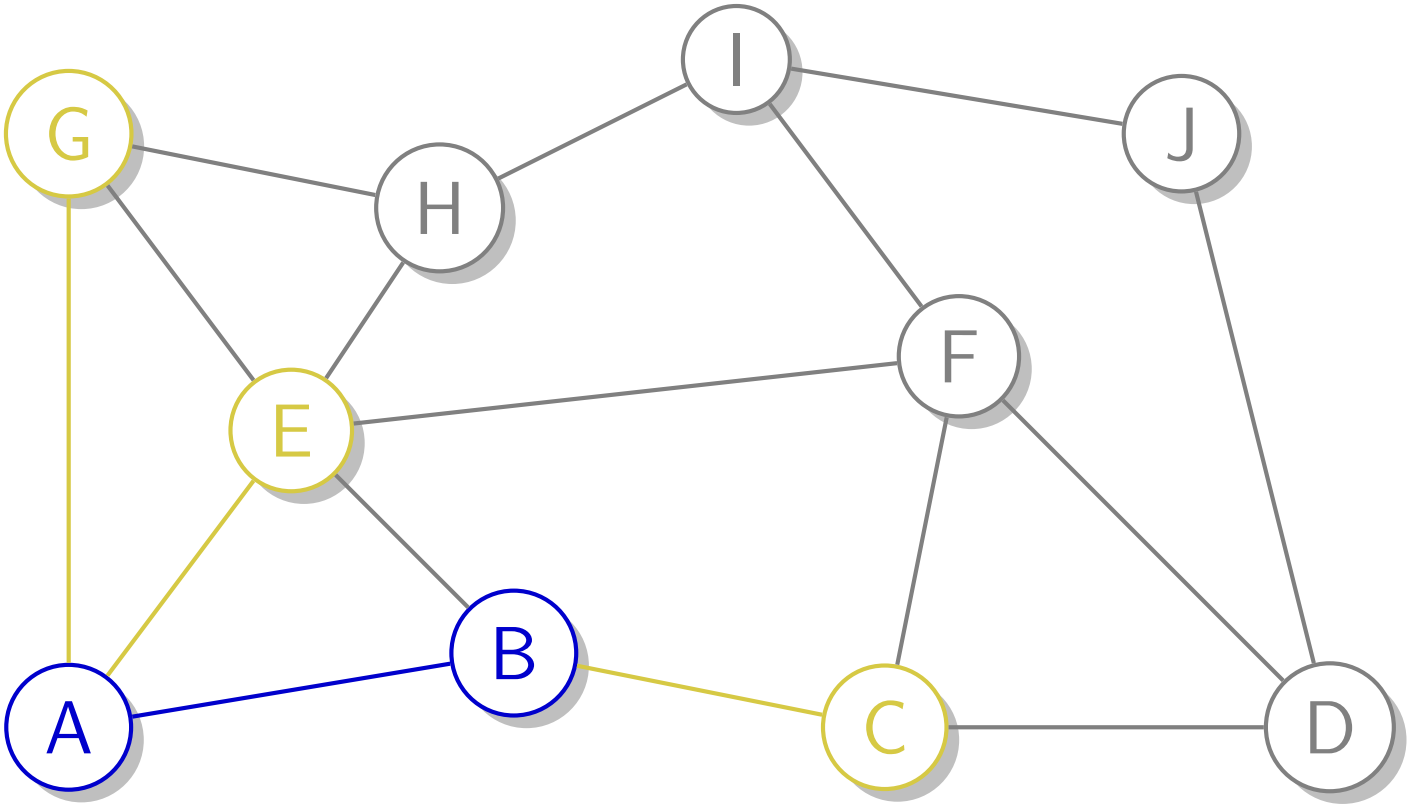
Průchod grafem do šířky, krok 9



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | E | G | C |

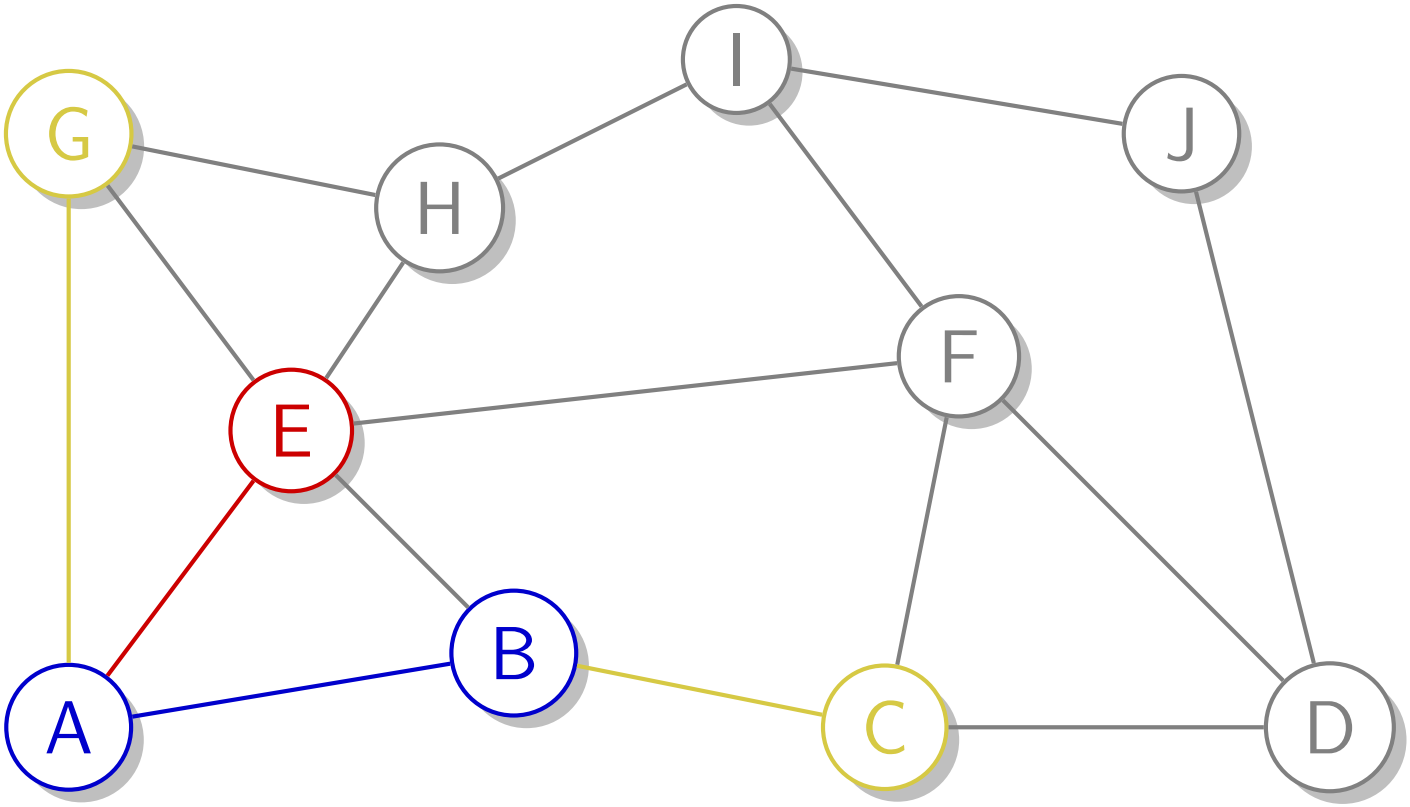
Průchod grafem do šířky, krok 10



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | E | G | C |

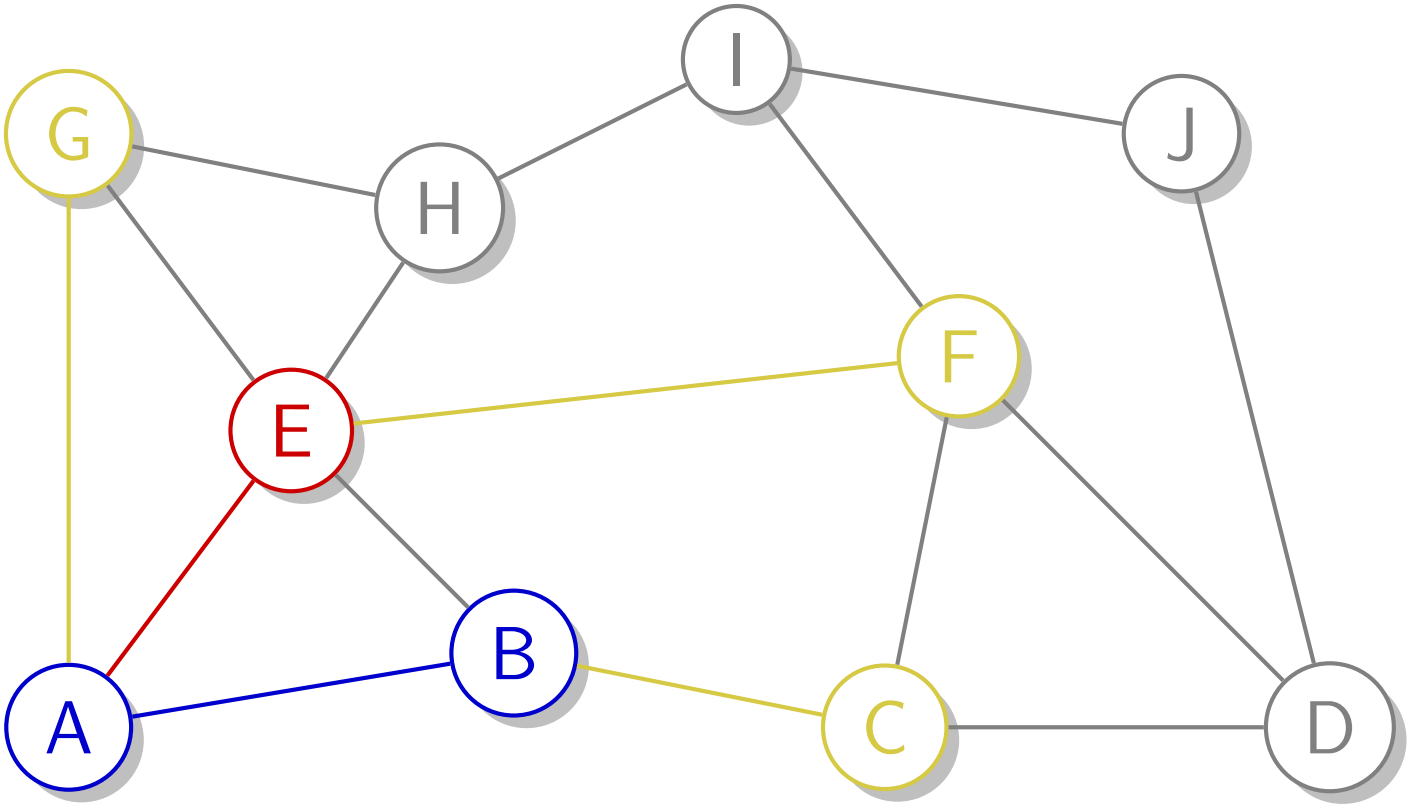
Průchod grafem do šířky, krok 11



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | G | C |

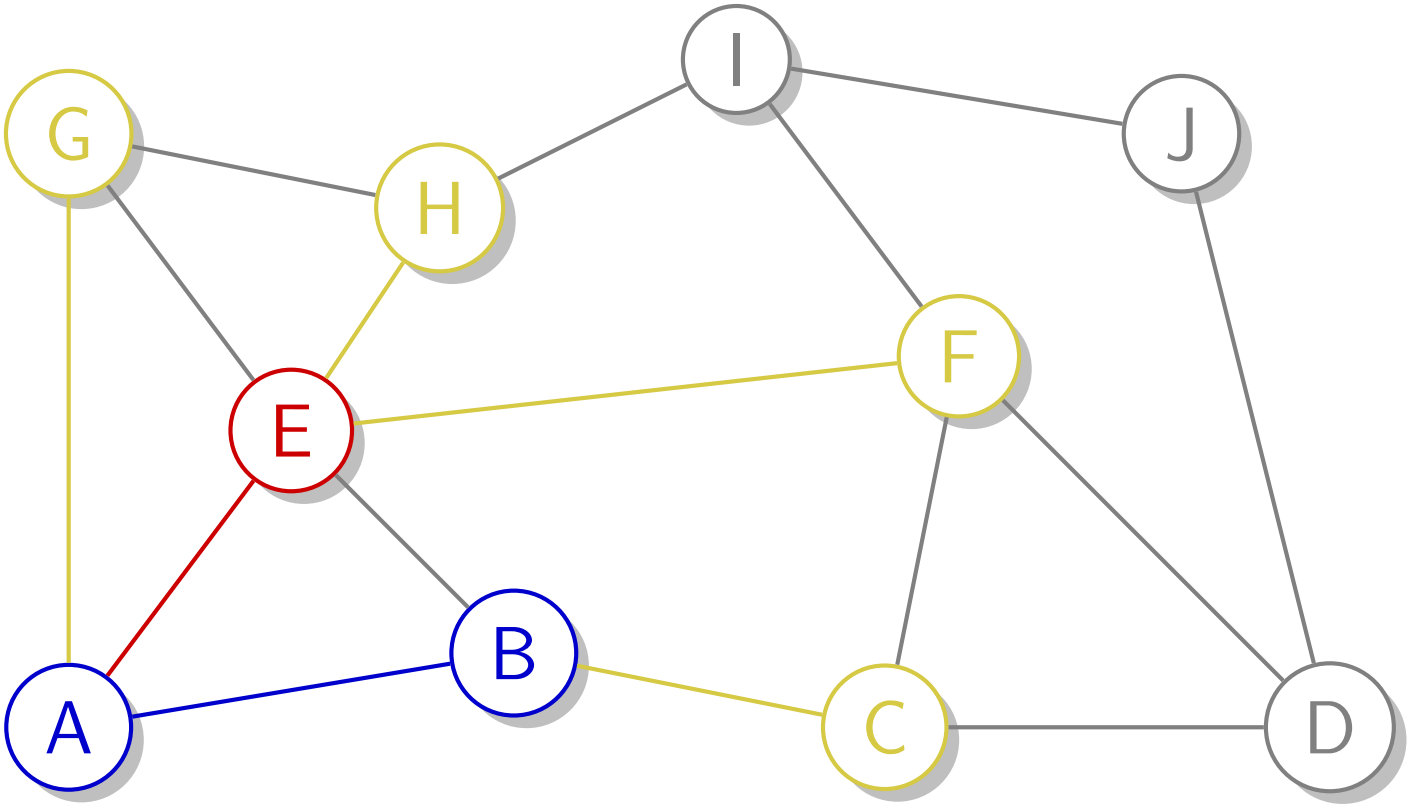
Průchod grafem do šířky, krok 12



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | G | C | F |

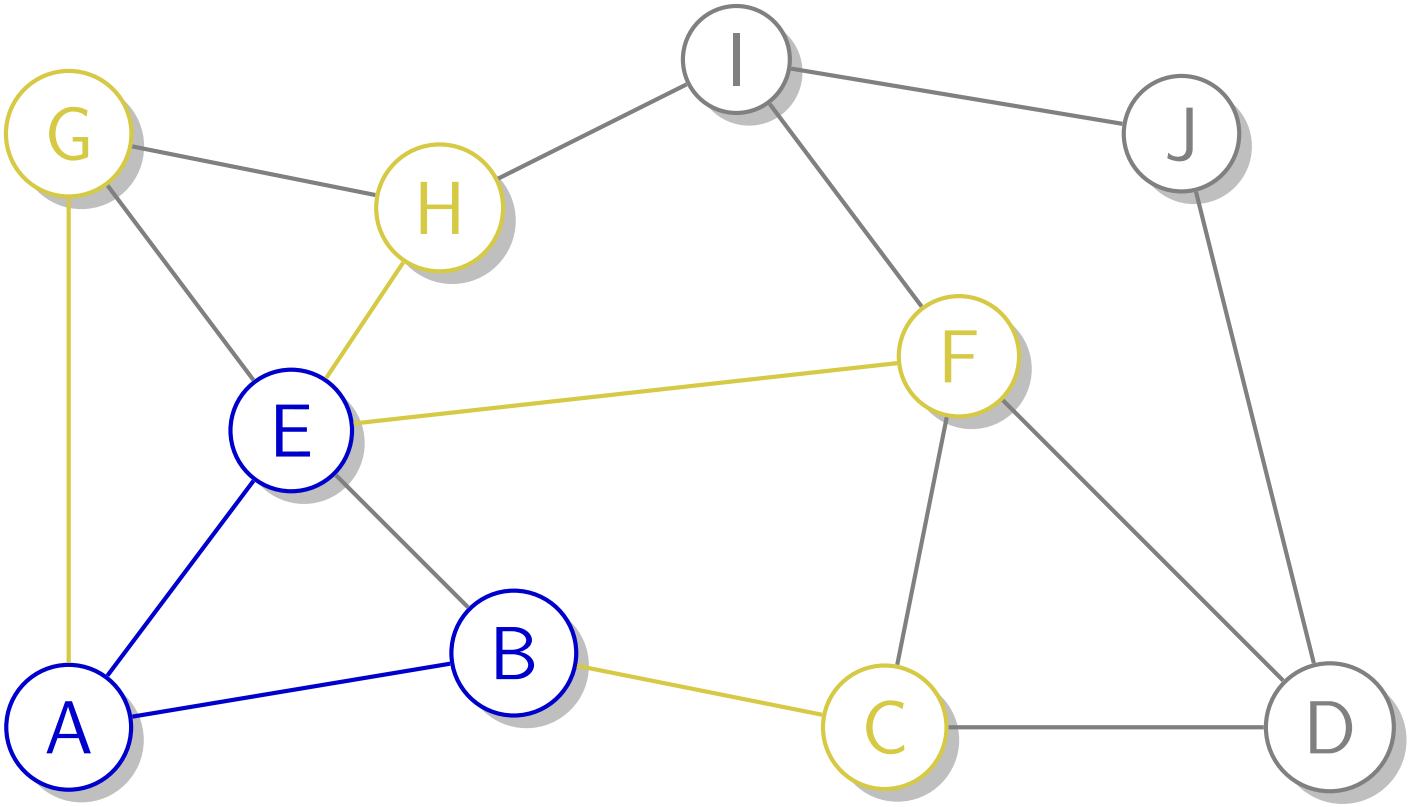
Průchod grafem do šířky, krok 13



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q	G	C	F	H	

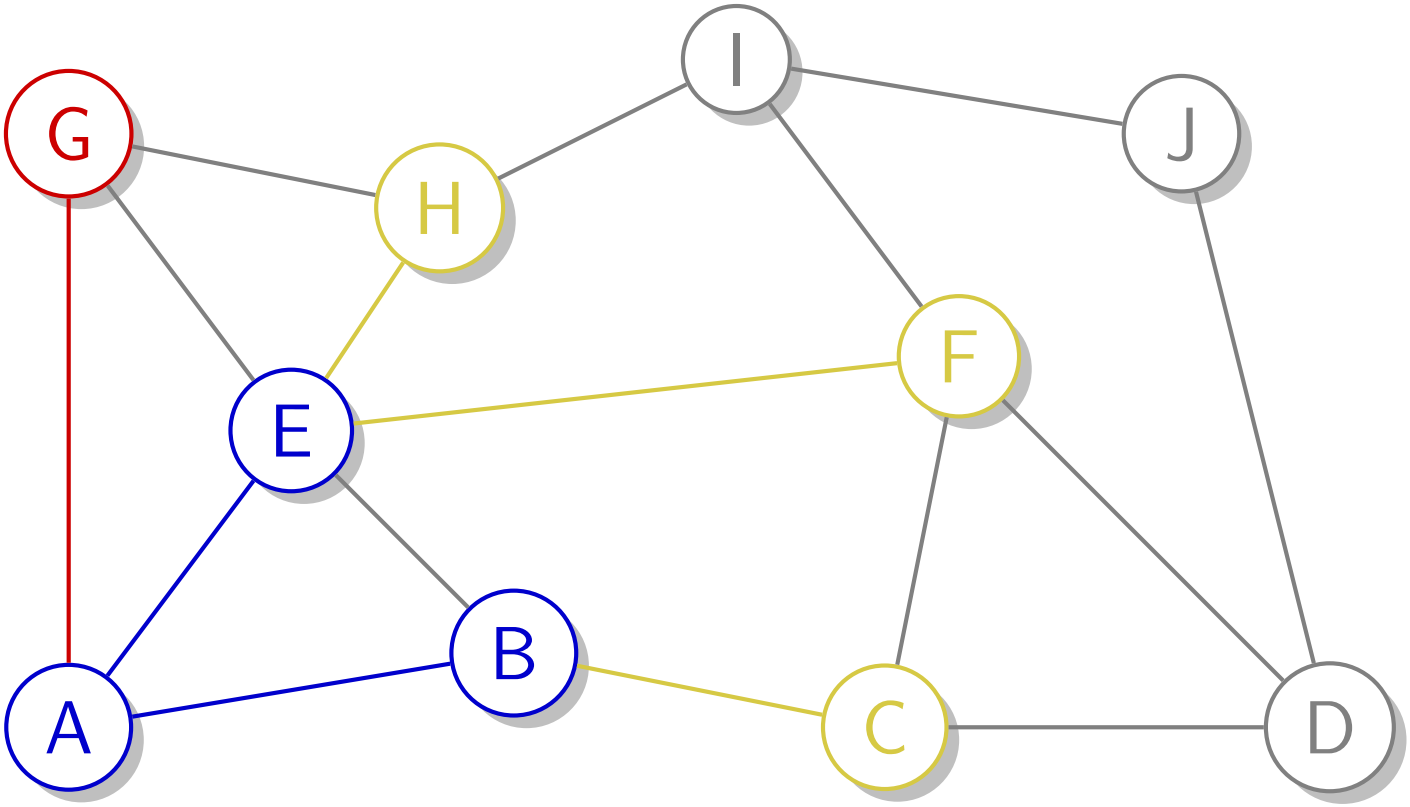
Průchod grafem do šířky, krok 14



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q	G	C	F	H	

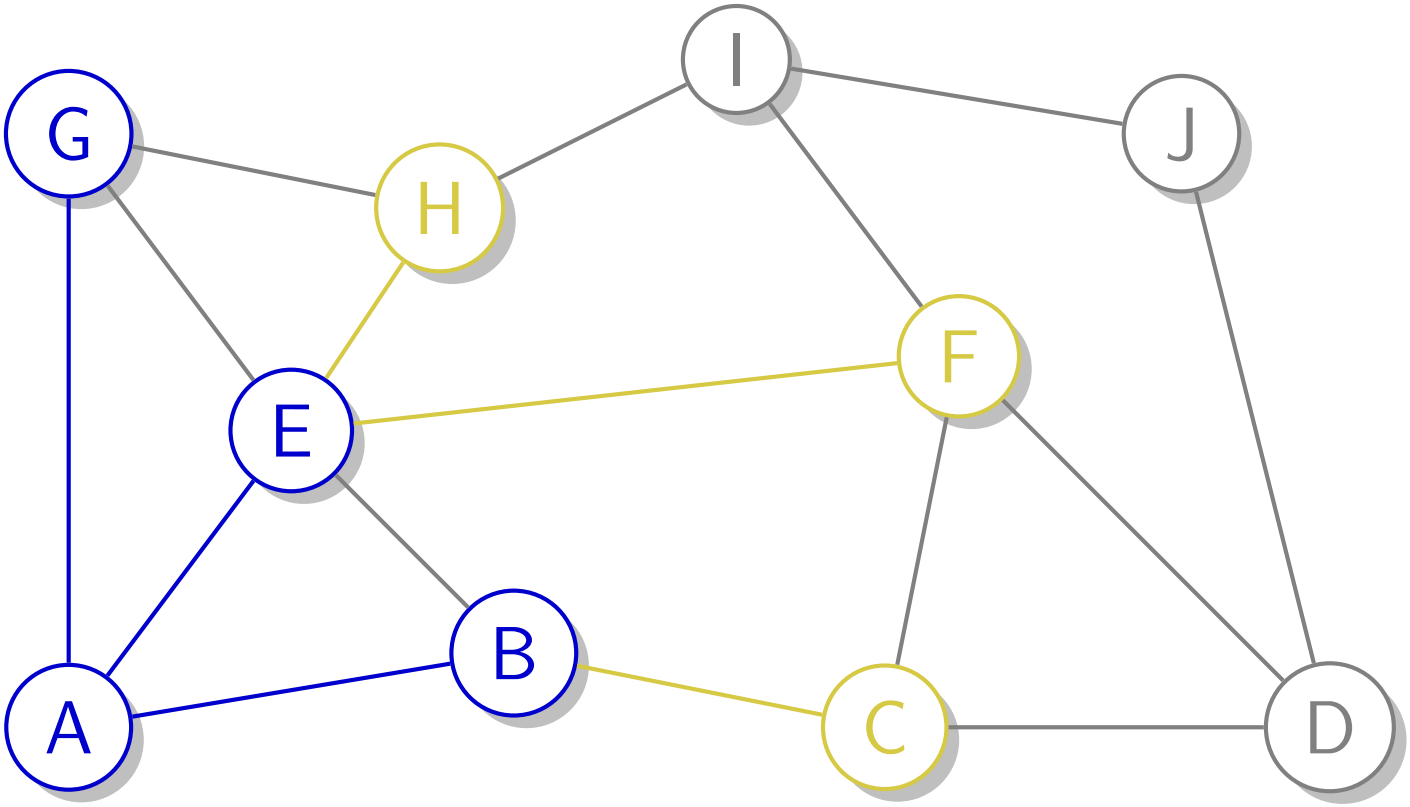
Průchod grafem do šířky, krok 15



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q | C | F | H |

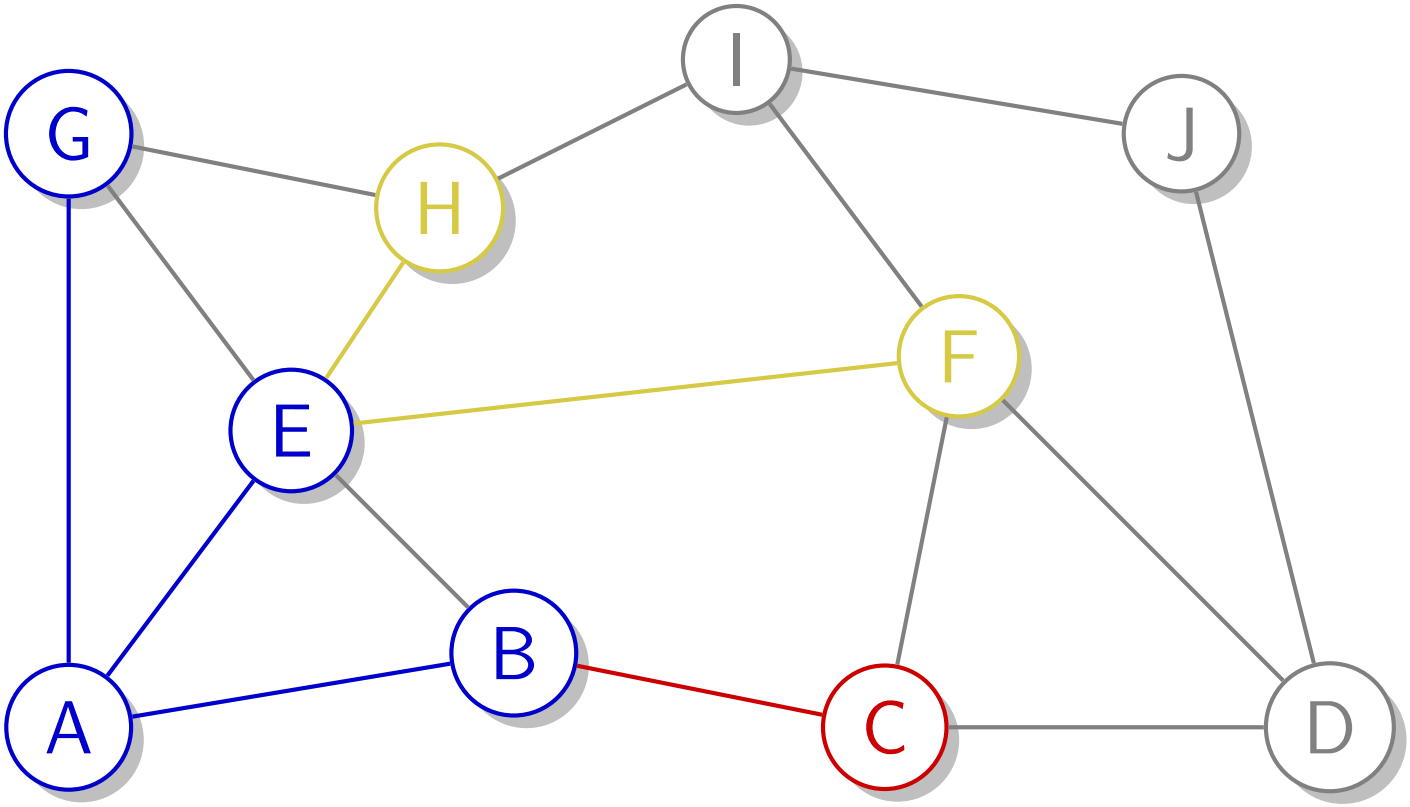
Průchod grafem do šířky, krok 16



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q | C | F | H |

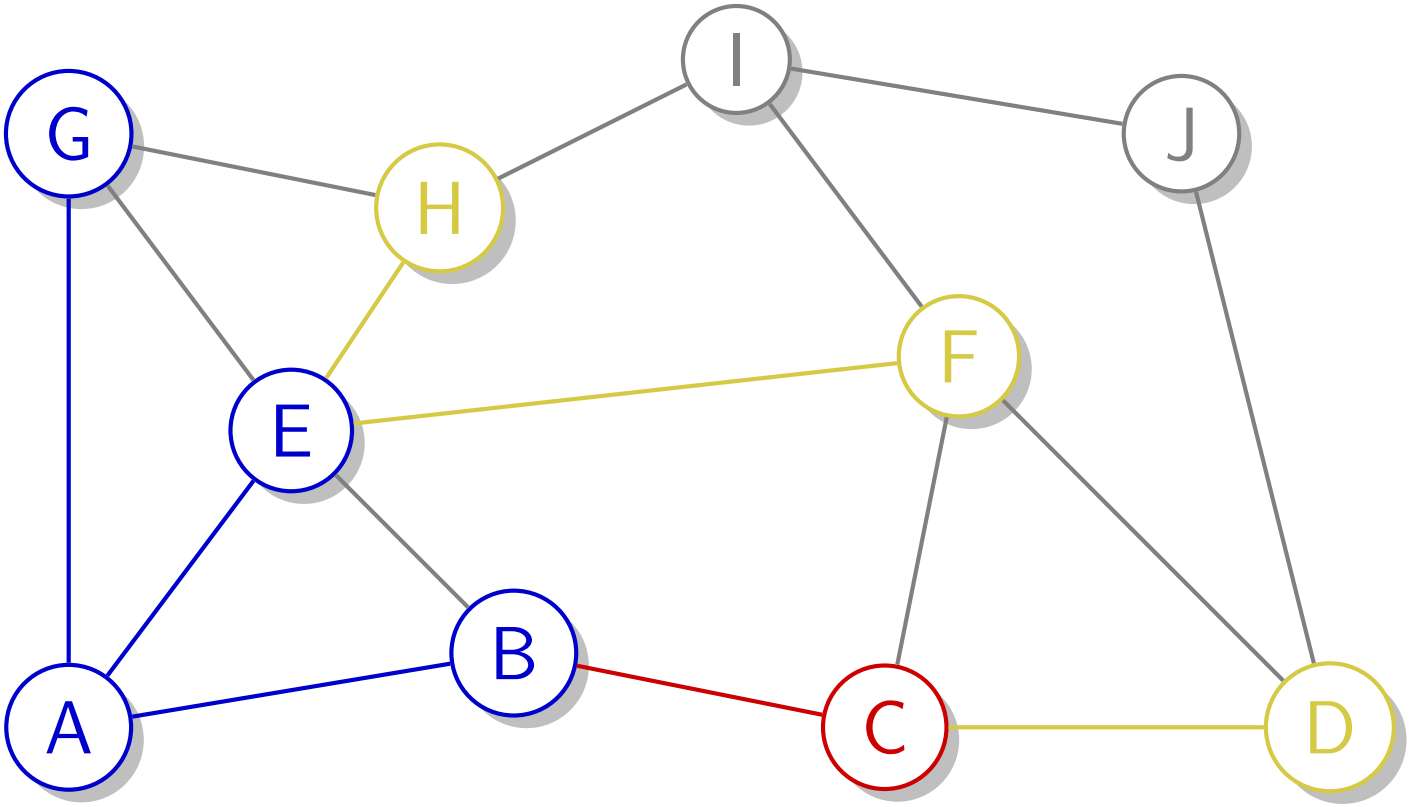
Průchod grafem do šířky, krok 17



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q | F | H |

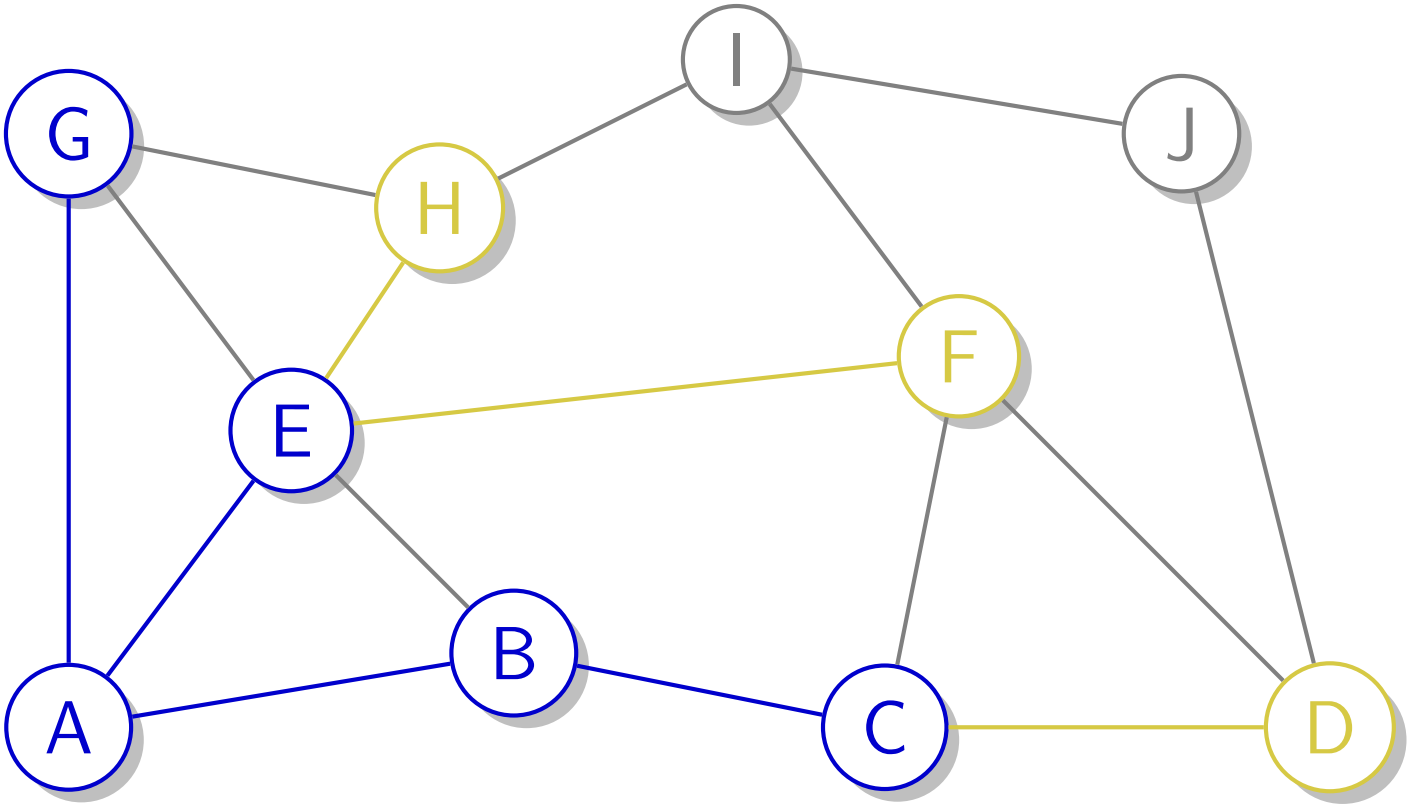
Průchod grafem do šířky, krok 18



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q	F	H	D	

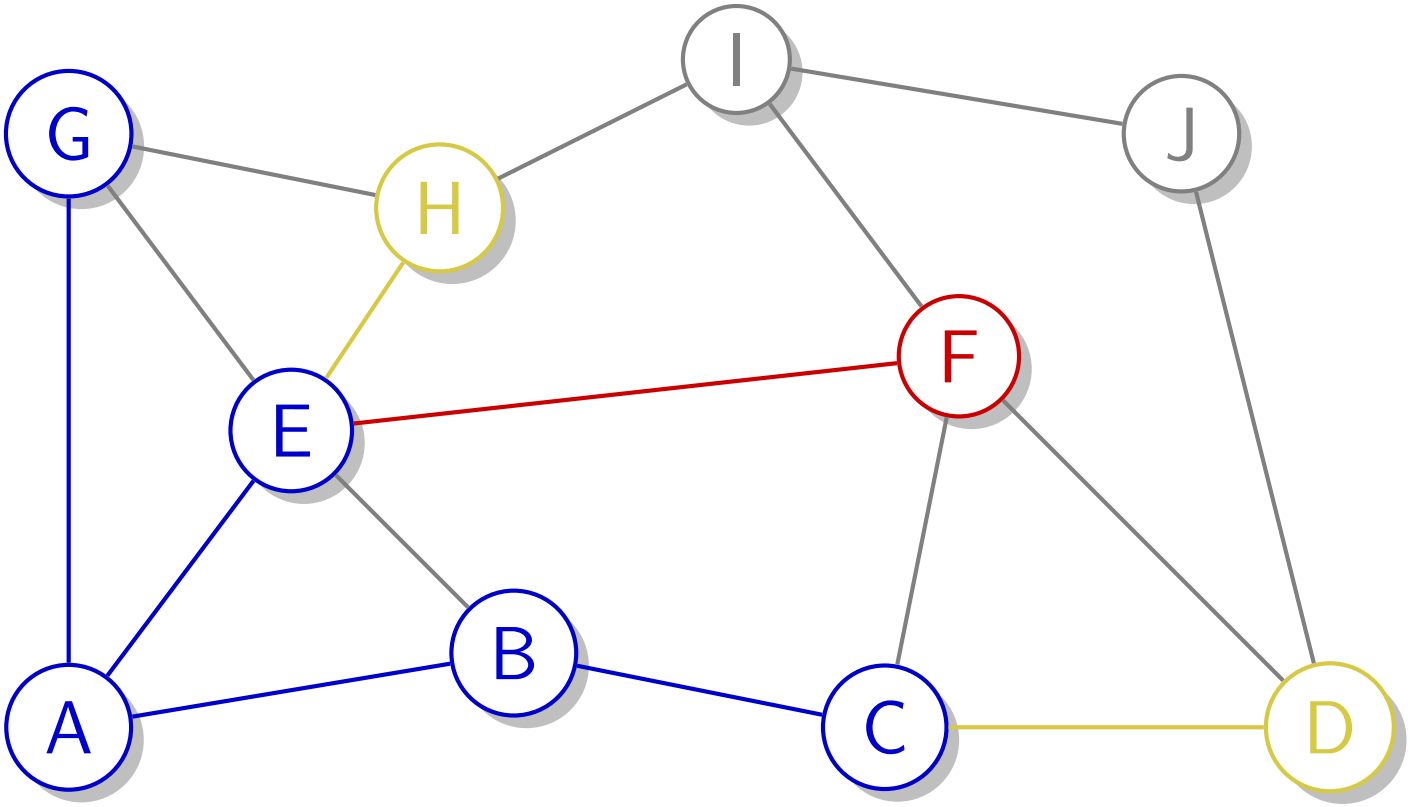
Průchod grafem do šířky, krok 19



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q	F	H	D	

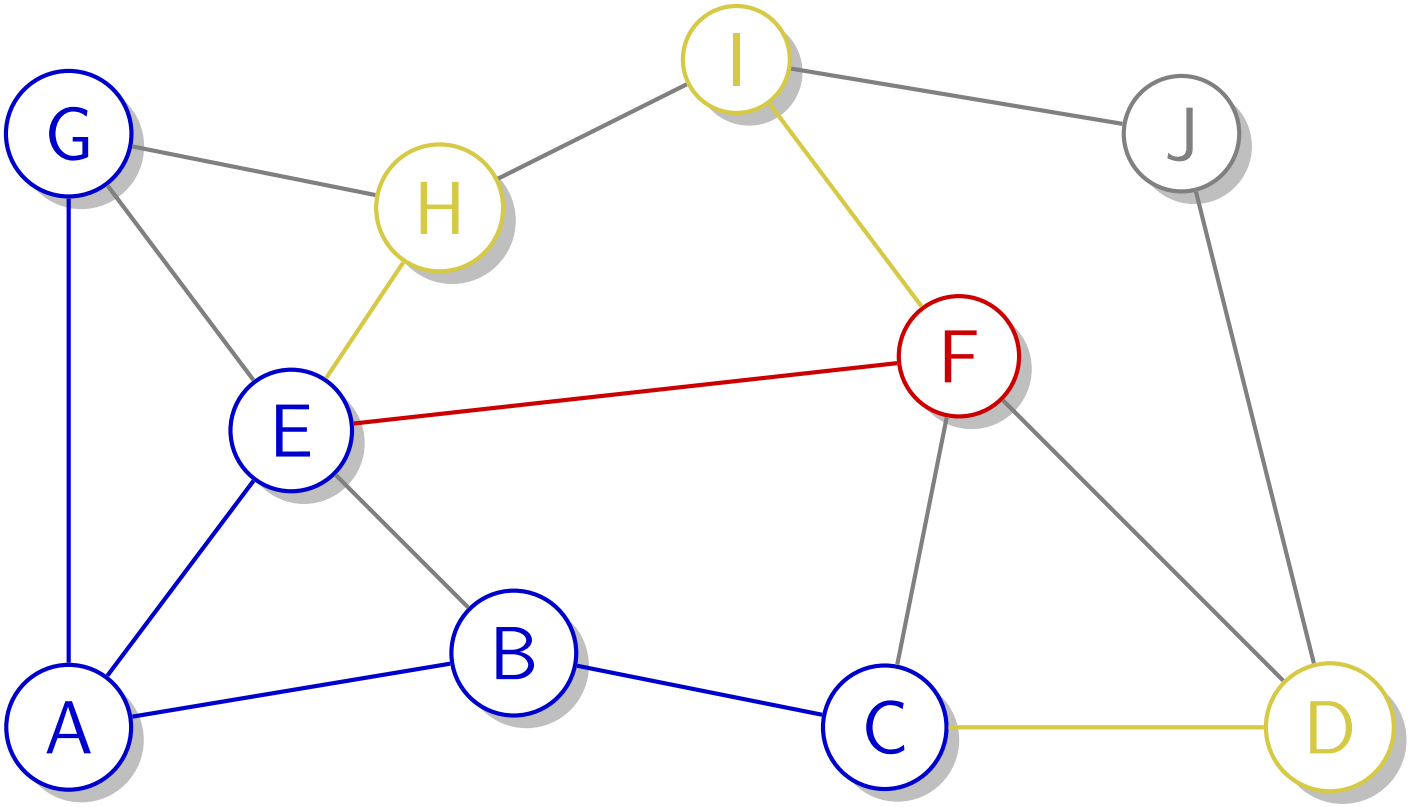
Průchod grafem do šířky, krok 20



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q | H | D |

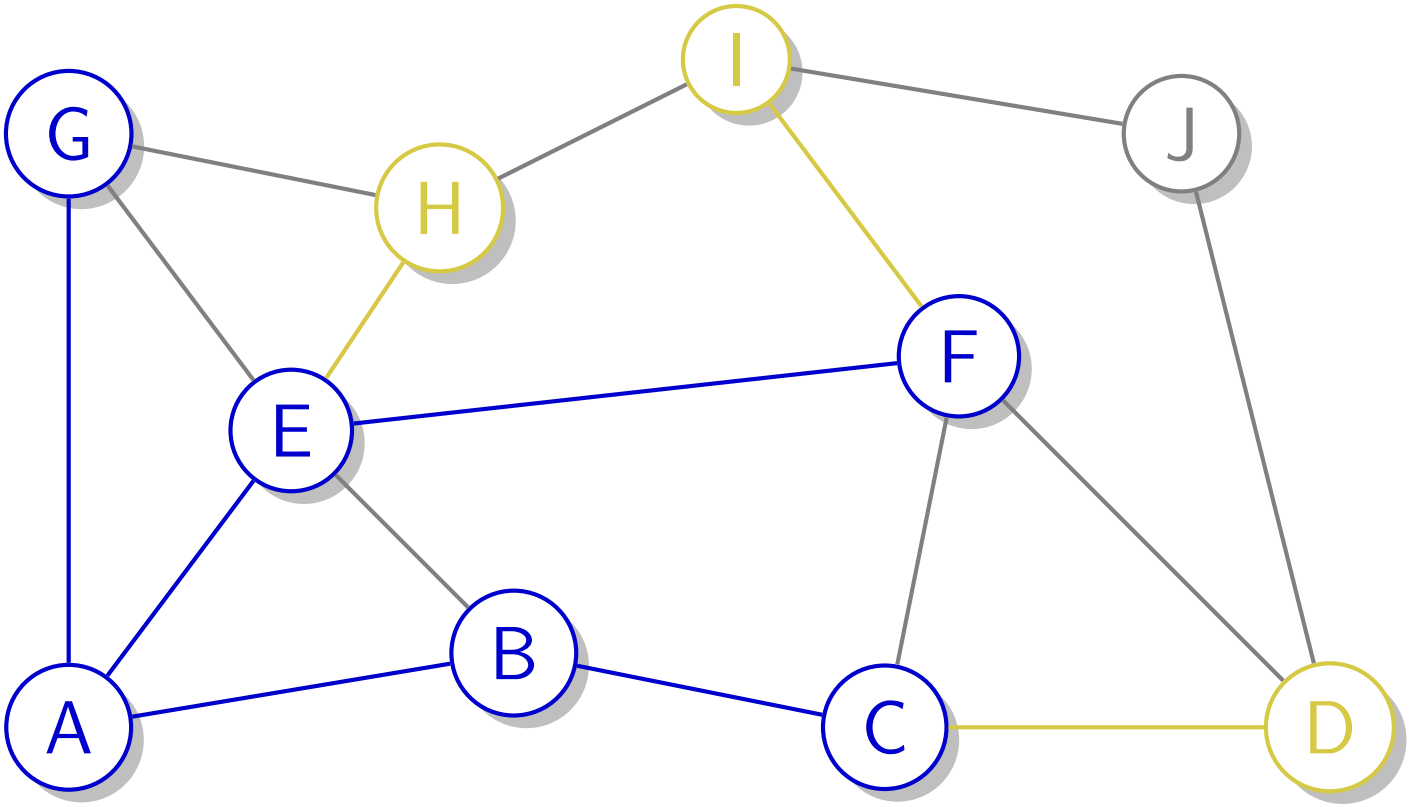
Průchod grafem do šířky, krok 21



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

Q | H | D | I |

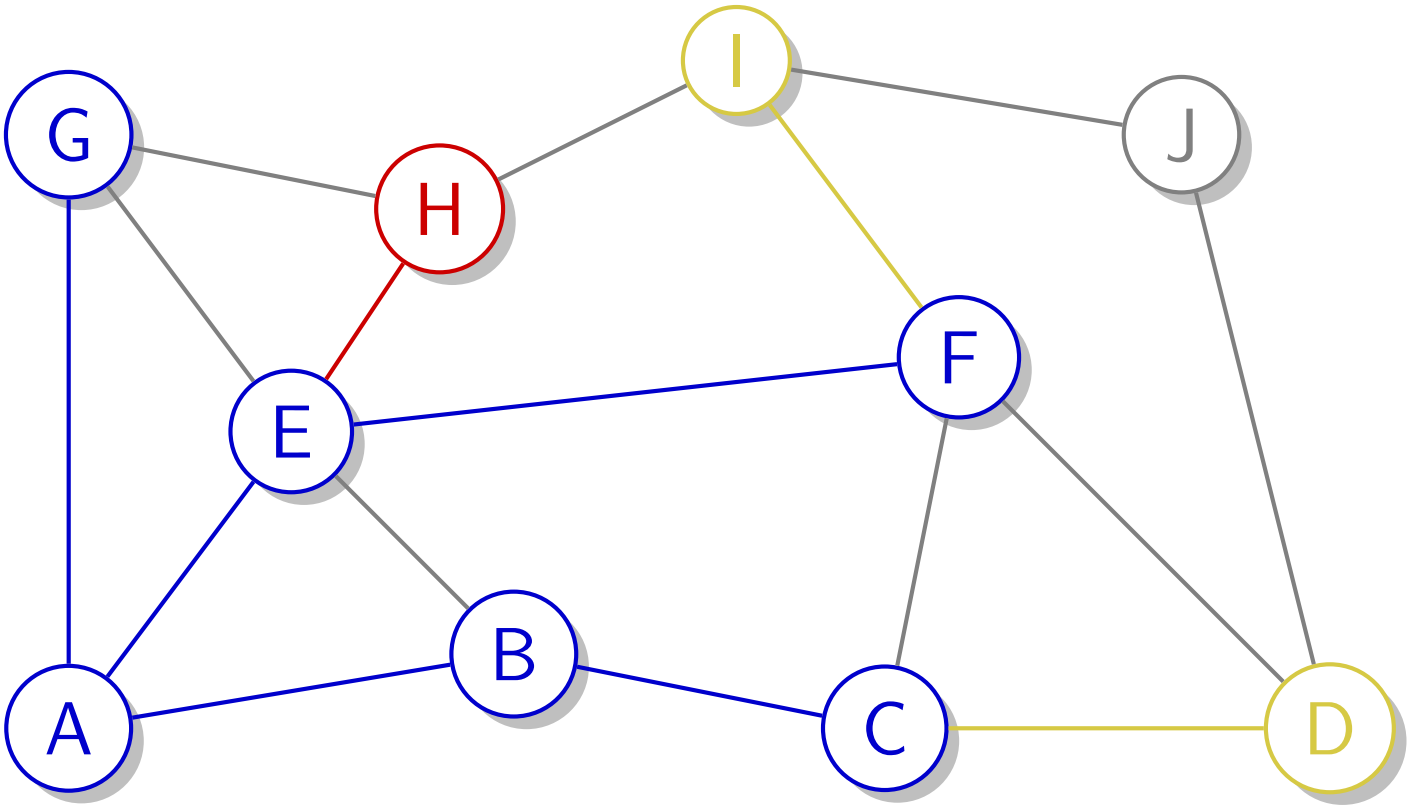
Průchod grafem do šířky, krok 22



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

Q | H | D | I |

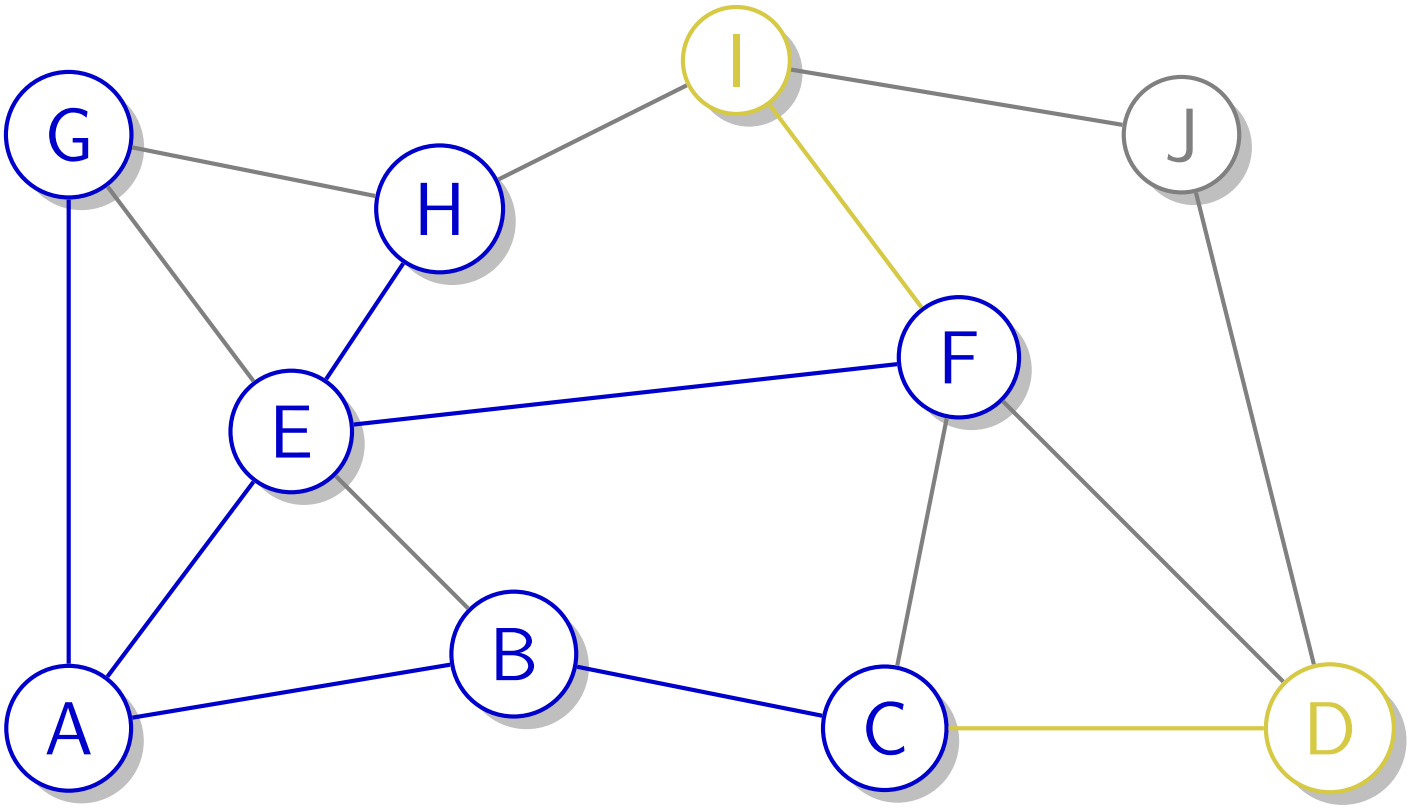
Průchod grafem do šířky, krok 23



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

Q | D | I |

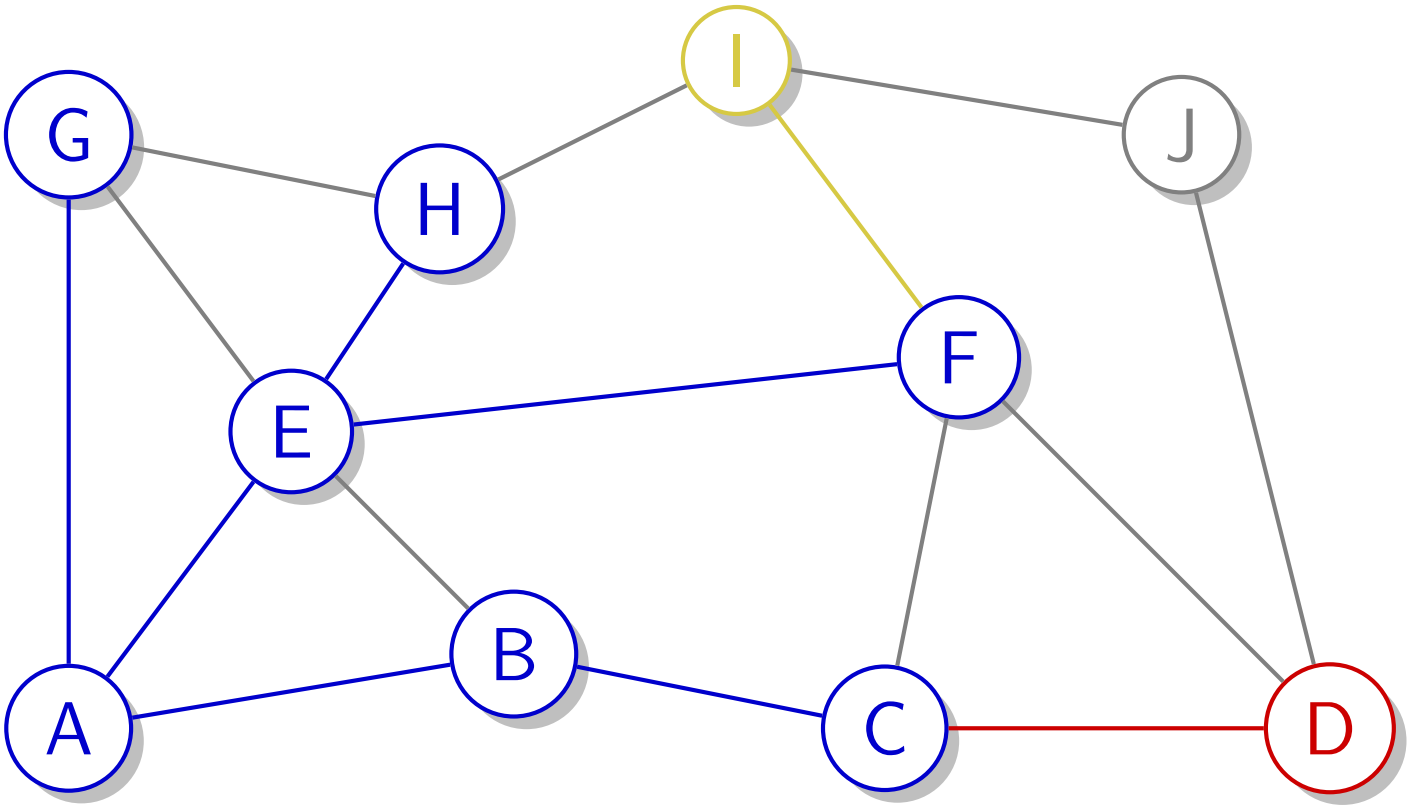
Průchod grafem do šířky, krok 24



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

Q | D | I |

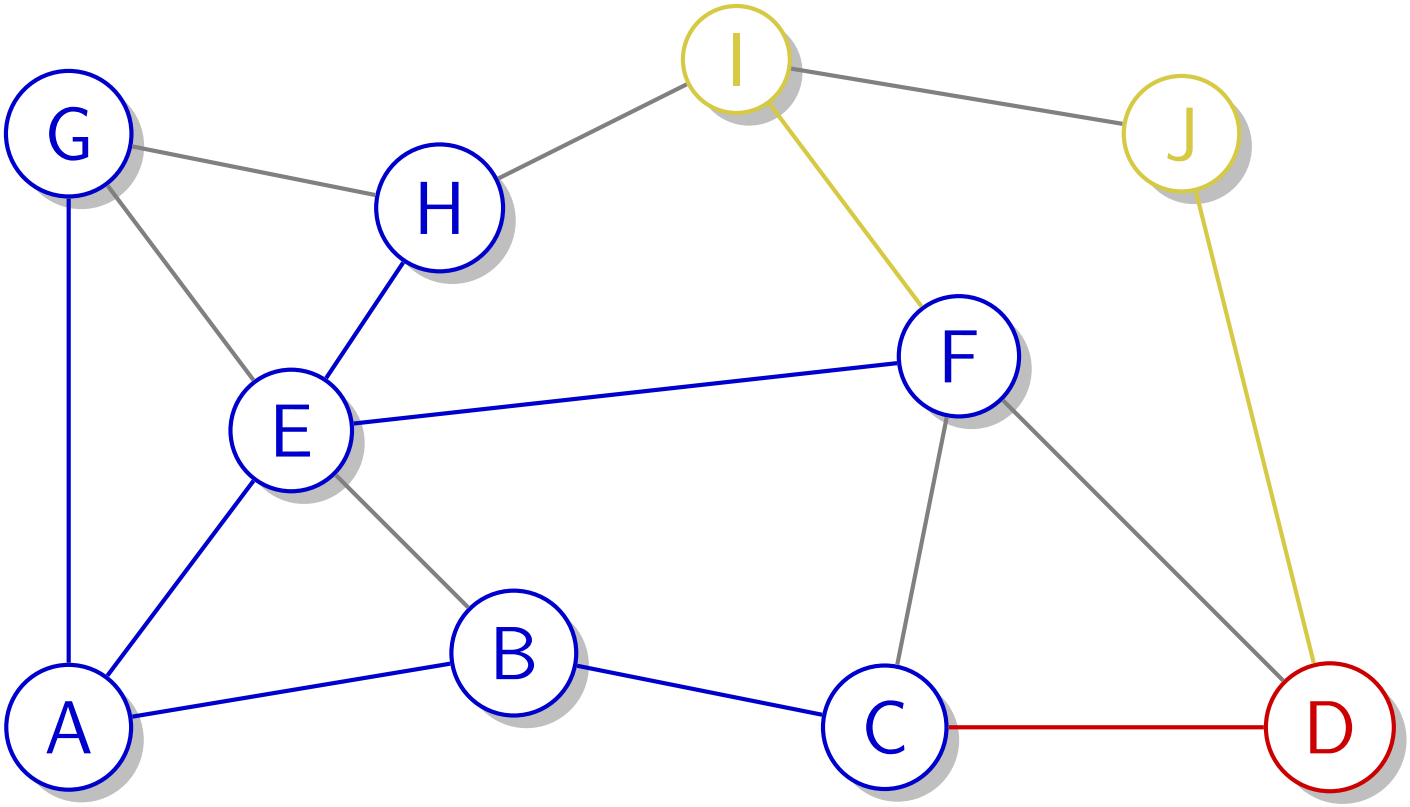
Průchod grafem do šířky, krok 25



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

Q | I |

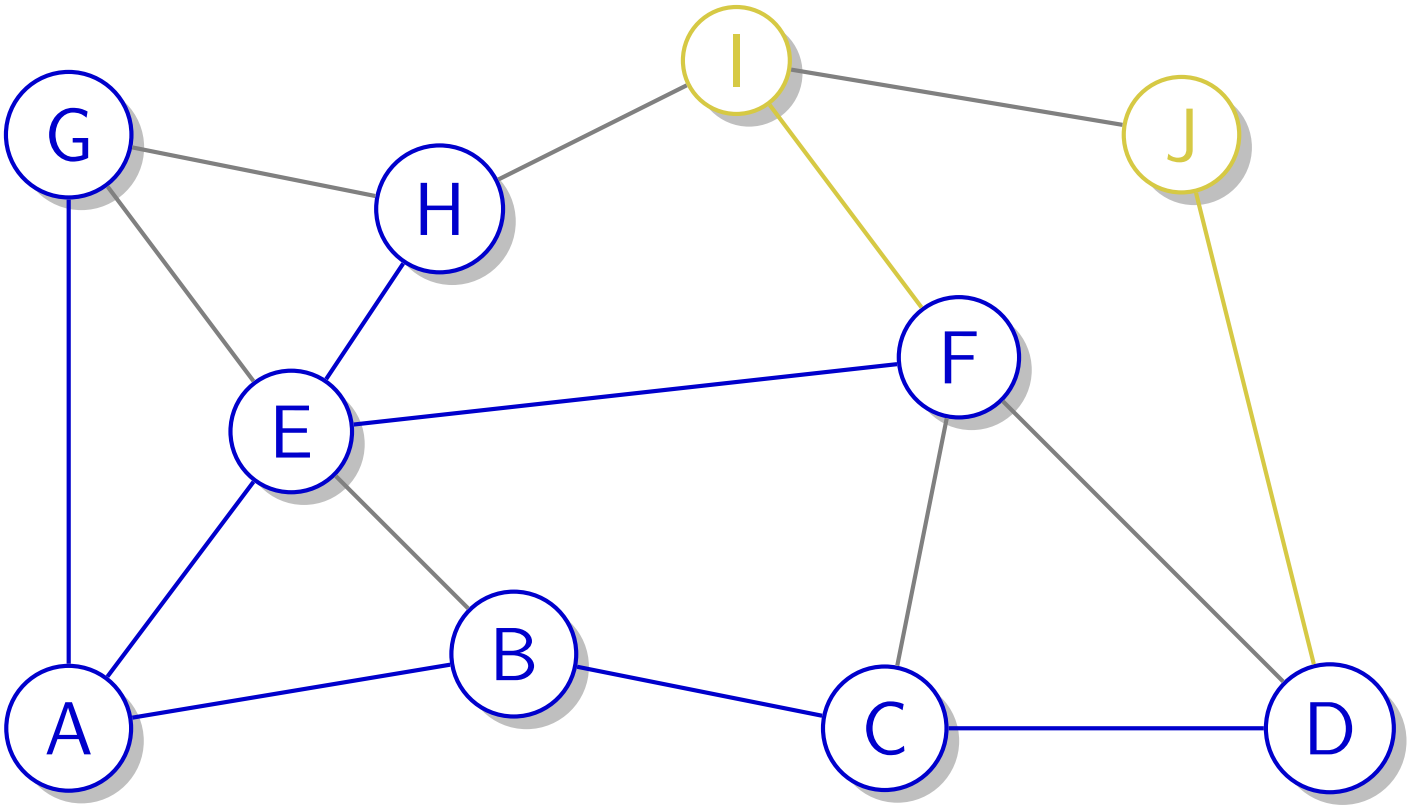
Průchod grafem do šířky, krok 26



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Q | I | J |

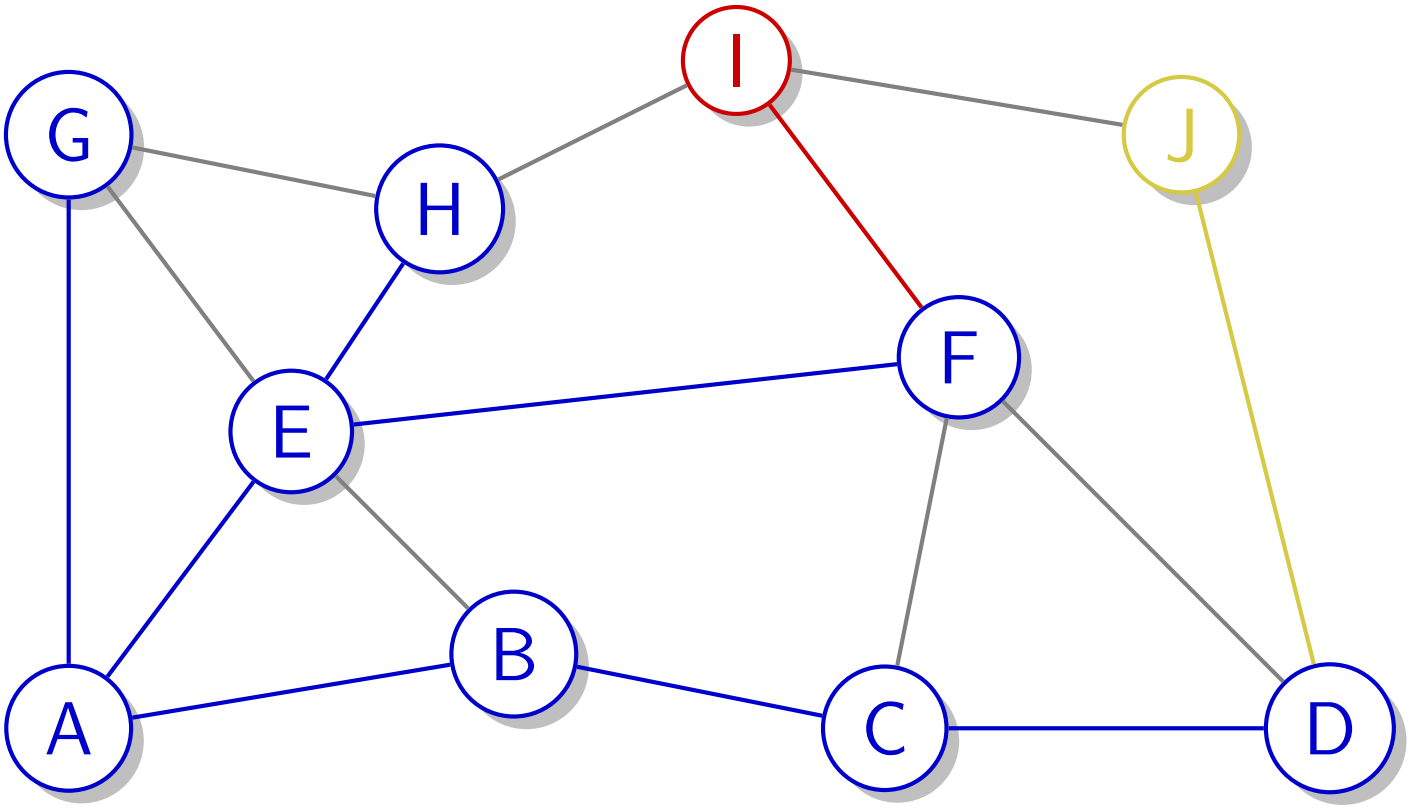
Průchod grafem do šířky, krok 27



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Q | I | J |

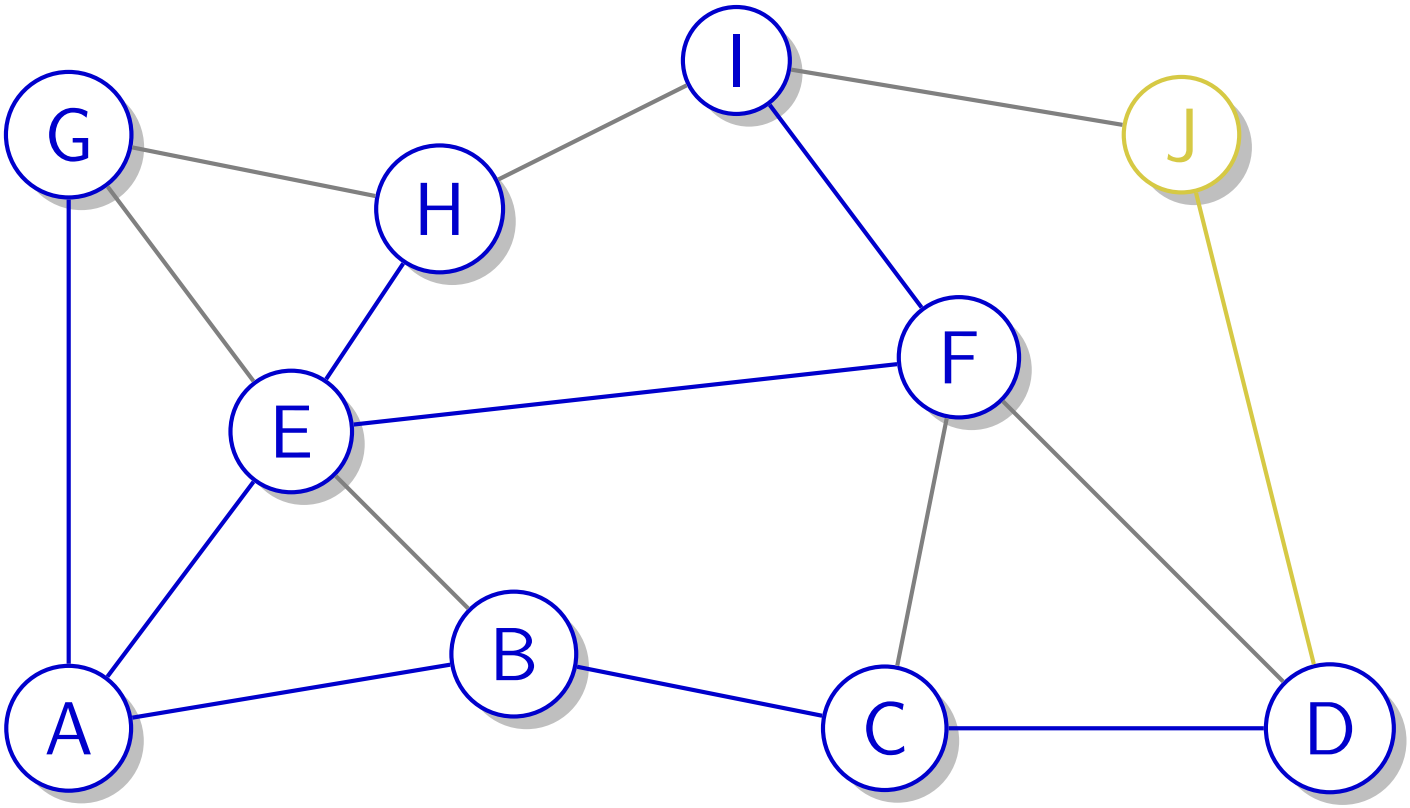
Průchod grafem do šířky, krok 28



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Q | J |

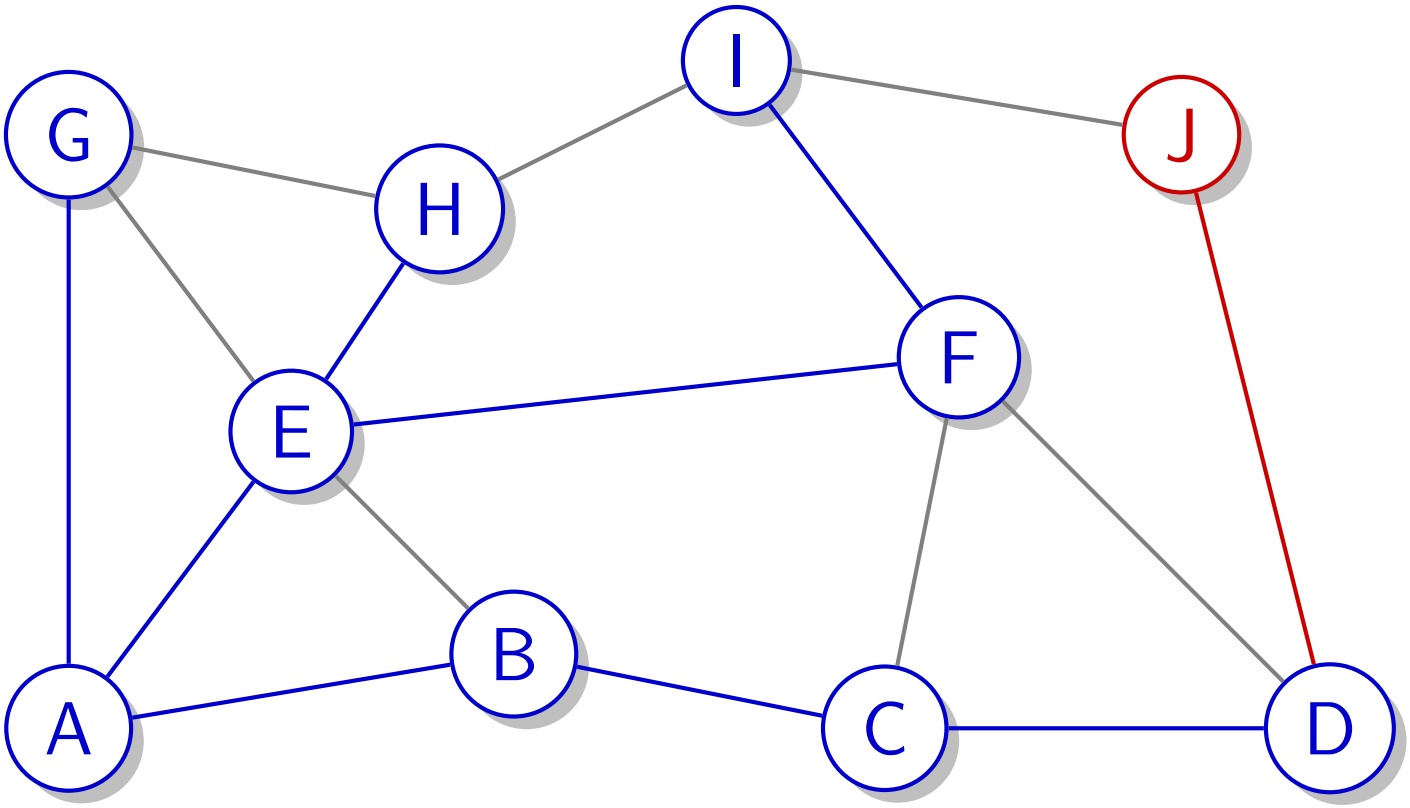
Průchod grafem do šířky, krok 29



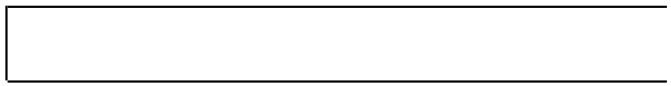
v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Q | J |

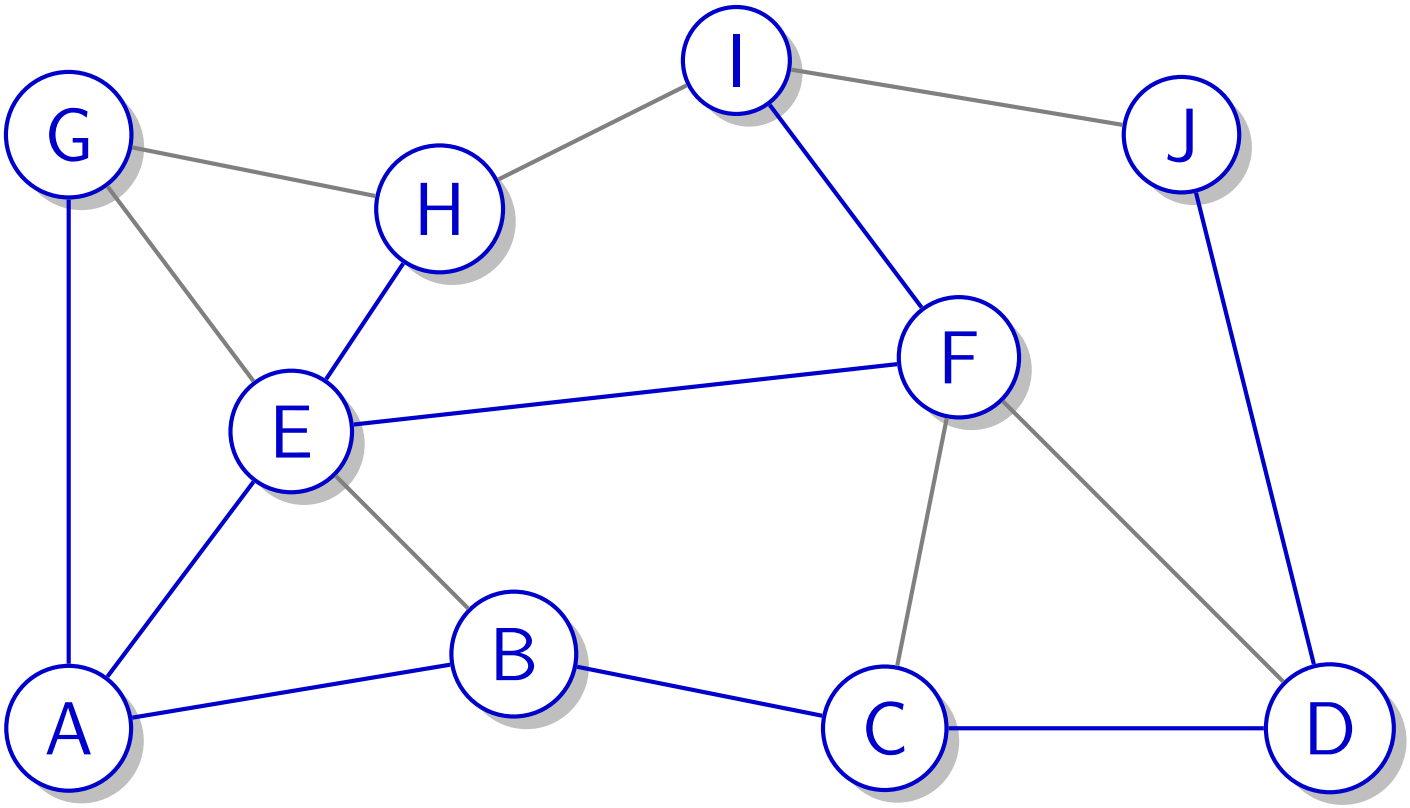
Průchod grafem do šířky, krok 30



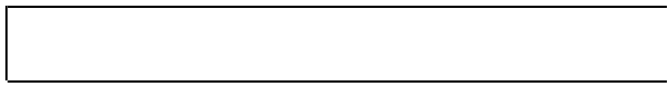
v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Q 

Průchod grafem do šířky, krok 31



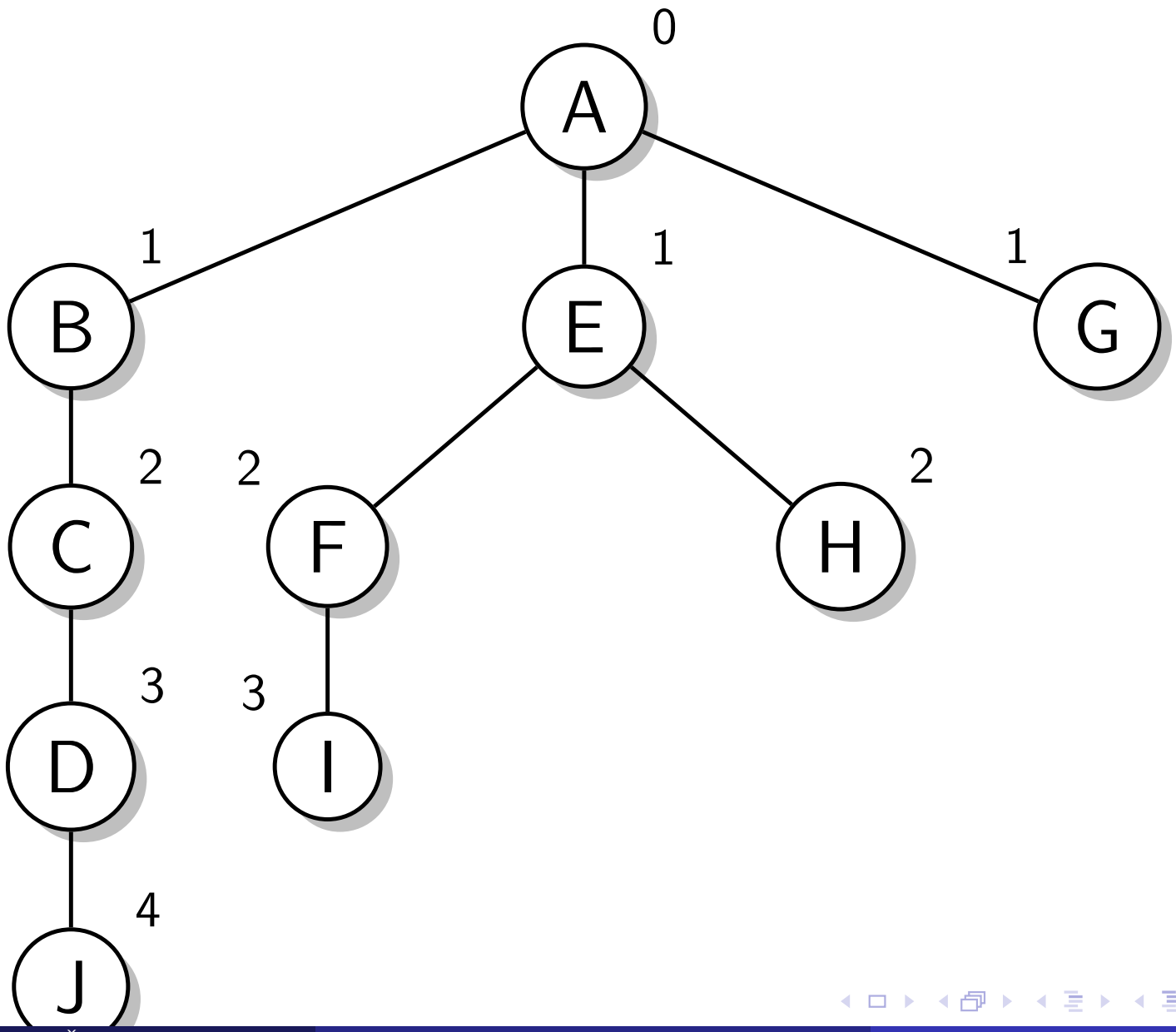
v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Q 

Průchod grafem do šířky

- Výstupem algoritmu je tzv. BF-strom.
- BF-strom je jednou z koster grafu.
- BF-strom obsahuje všechny vrcholy dostupné z počátečního vrcholu s.
- BF-strom je stromem nejkratších cest.
- Průměr souvislého grafu – maximální délka nejkratší cesty pro libovolné dva vrcholy.
- Složitost algoritmu: $O(|V| + |E|)$.

Průchod grafem do šířky – BF-strom



Prohledávání grafu do hloubky

- anglicky Depth-first Search (DFS)
- základem pro zjišťování počtu komponent grafu, vyhledání všech cest z daného vrcholu, testování acykličnosti grafu, topologické třídění.
- lze řešit rekurzivně, podobnost s backtrackingem.

Idea algoritmu

1. nejprve označkujeme vrchol s,
2. pak označkujeme jednoho následovníka vrcholu s, pak jeho následovníky atd.
3. až vyčerpáme všechny dostupné následovníky, vracíme se postupně zpět,
4. a pokračujeme dalším následovníkem vrcholu s.

Algoritmus lze přirovnat k prohledávání bludiště jedním člověkem.

Prohledávání grafu do hloubky – stavy vrcholu

- Každému vrcholu přiřadíme jeden ze čtyř možných stavů:
  - unknown – vrchol ještě nebyl navštíven, algoritmus k němu ještě nedošel.
  - discovered – vrchol byl již objeven, čeká v zásobníku na zpracování.
  - current – vrchol je zpracován, čeká v zásobníku na dokončení zpracování svých sousedů
  - finished – zpracování vrcholu a jeho sousedů bylo dokončeno.
- Každý vrchol je počátku ve stavu unknown, pak přejde do stavu discovered, current a nakonec se ocitne ve stavu finished.

Prohledávání grafu do hloubky

- Dále každému vrcholu v přiřadíme dvě časová razítka: $d[v]$ a $f[v]$.
- $d[v]$ označuje okamžik, kdy se vrchol dostal do stavu current.
- $f[v]$ označuje okamžik, kdy se vrchol dostal do stavu finished.
- Pro všechny vrcholy platí, že $d[v] < f[v]$.
- Před $d[v]$ byl vrchol ve stavu unknown nebo discovered, mezi $d[v]$ a $f[v]$ byl ve stavu current a po $f[v]$ je ve stavu finished.

Prohledávání grafu do hloubky

- Graf $G = (V, E)$
- Počáteční vrchol s, $s \in V$.
- Pomocné datové struktury:

  state – tabulka se stavy všech vrcholů,

  π – o každý vrchol u je v tabulce π uložen jeho předchůdce, pokud neexistuje obsahuje tabulka hodnotu nothing,

  d – tabulka časových razítek s časy přechodu vrcholu do stavu current,

  f – tabulka časových razítek s časy přechodu vrcholu do stavu finished,

  time – globální hodiny logického času.

  stack – zásobník vrcholů ve stavu discovered nebo current.

Algoritmus průchodu grafem do hloubky

Input : Graf $G(V, E)$, počáteční vrchol $s \in V$
Output: DF-strom

```
42 Init(V);
43 state [s] ← discovered;
44 stack ← ∅;
45 Push(stack, s);
46 time ← 0;
47 while stack ≠ ∅ do
48     u ← Top(stack);
49     switch state [u] do
50         case discovered do
51             ProcessDiscoveredVertex(u);
52         end
53         case current do
54             ProcessCurrentVertex(u);
55         end
56     end
57 end
```

Algoritmus průchodu grafem do hloubky (pokrač.)

```
1 Procedure Init(V)
  |   Input  : Množina vrcholů V
2 |   foreach u ∈ V do
3 |   |   state [u] ← unknown;
4 |   |   d [u] ← f [u] ← ∞;
5 |   |   π [u] ← nothing;
6 |   end
7 end
```

Algoritmus průchodu grafem do hloubky (pokrač.)

```
1  Procedure ProcessDiscoveredVertex(u)
       Input  : Vrchol u ∈ V
2      state [u] ← current;
3      d [u] ← time ← time + 1;
4      foreach v ∈ Adj(G, u) do
5          if state [v] = unknown then
6              state [v] ← = discovered;
7              π [v] ← u;
8              Push(stack, v);
9          end
10     end
11 end
```

Algoritmus průchodu grafem do hloubky (pokrač.)

```
1 Procedure ProcessCurrentVertex (u)
  |   Input  : Vrchol u ∈ V
2 |   state [u] ← finished;
3 |   f [u] ← time ← time + 1;
4 |   Pop(stack);
5 end
```

Animace průchodu grafem do hloubky – legenda

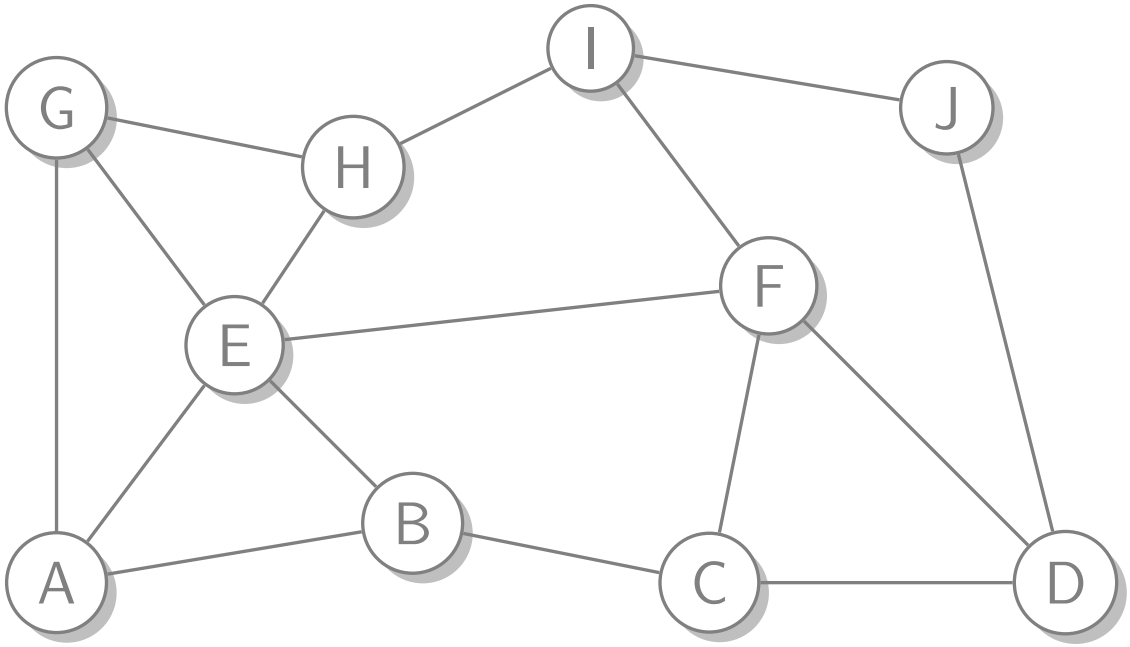
Vrcholy grafu:

šedá	vrchol ve stavu unknown
žlutá	vrchol ve stavu discovered
červená	vrchol ve stavu current
modrá	vrchol ve stavu finished

Hrany grafu:

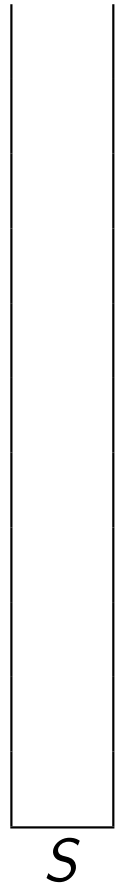
šedá	hrana mezi vrcholy ve stavu unknown nebo hrana nepatřící do DF-stromu
žlutá	hrana incidentní s vrcholy ve stavu discovered
červená	hrana incidentní s vrcholem ve stavu current
modrá	hrana mezi vrcholy ve stavu finished

Průchod grafem do hloubky, krok 1

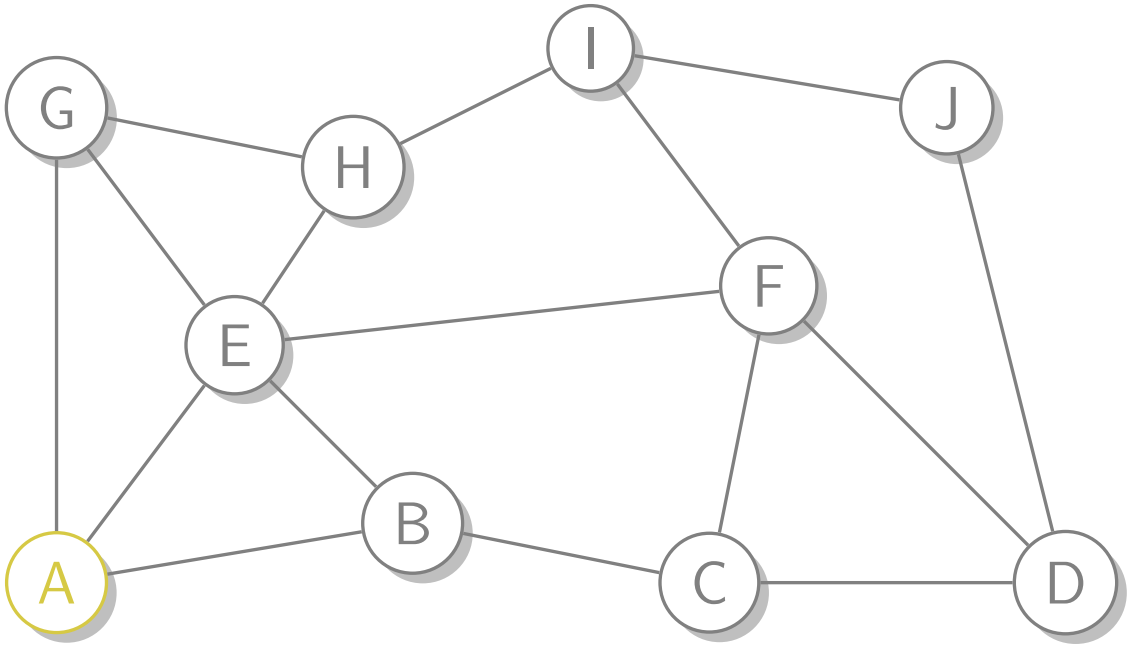


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	∞	∞	/
B	∞	∞	/
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	/

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

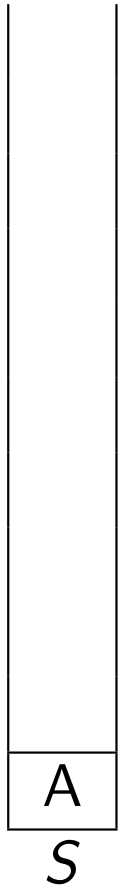


Průchod grafem do hloubky, krok 2

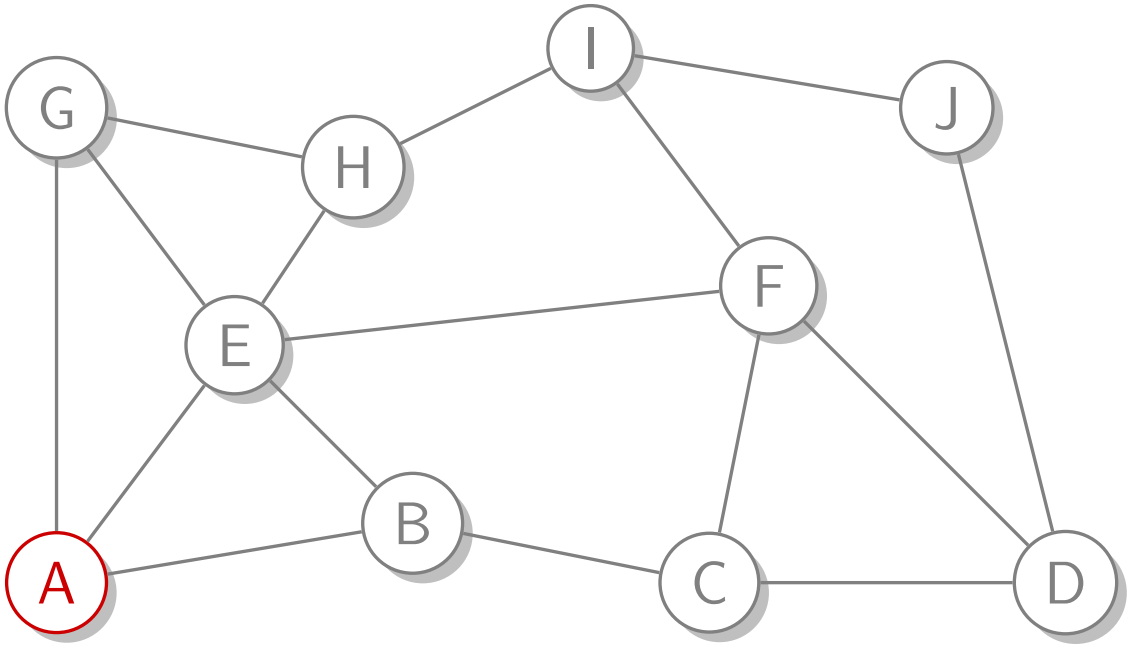


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	∞	∞	/
B	∞	∞	/
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	/

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

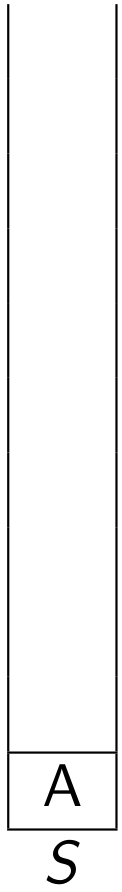


Průchod grafem do hloubky, krok 3

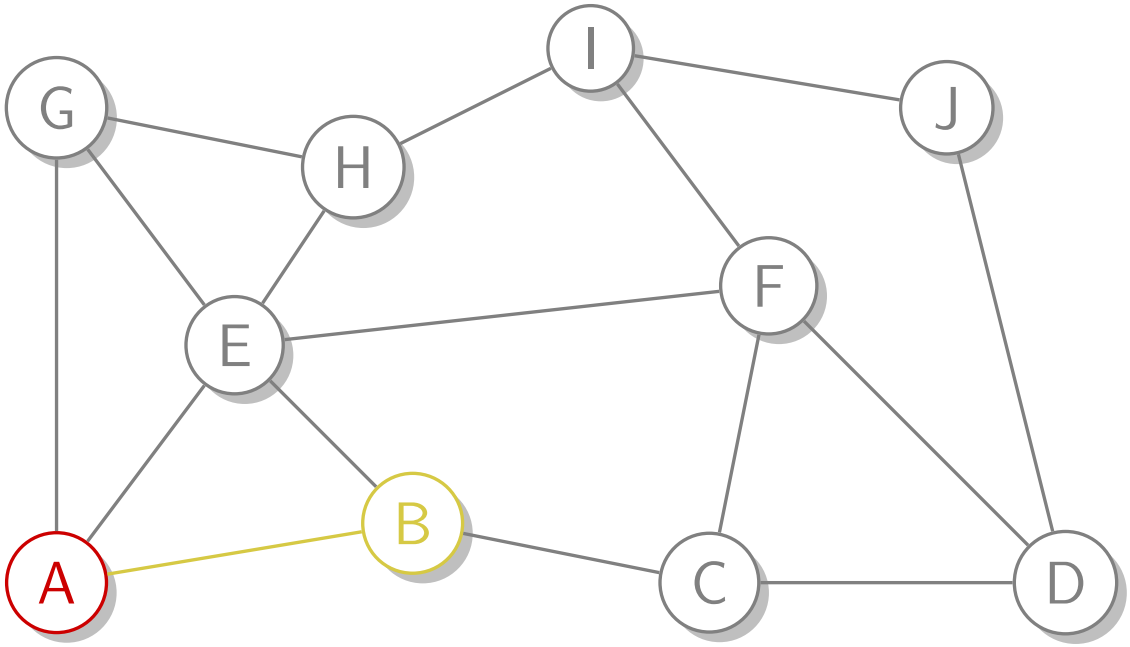


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	/
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	/

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

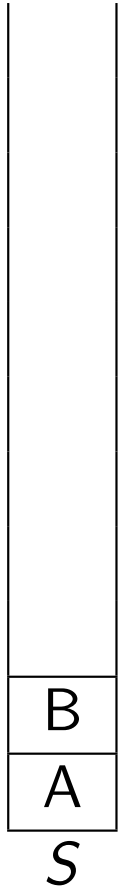


Průchod grafem do hloubky, krok 4

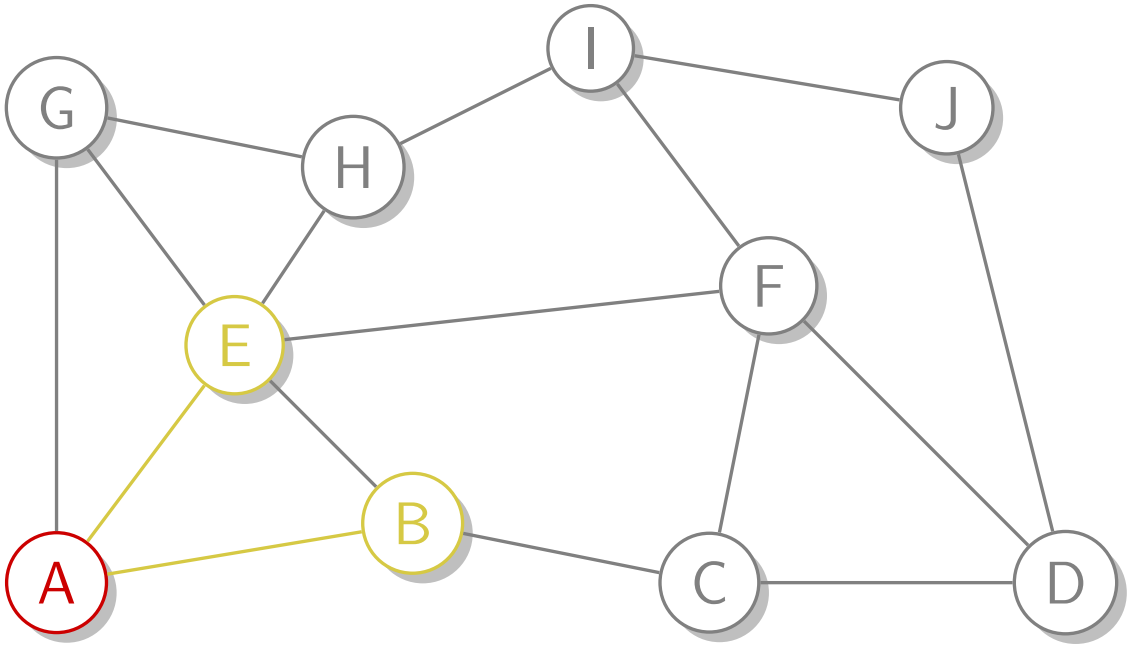


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	/

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

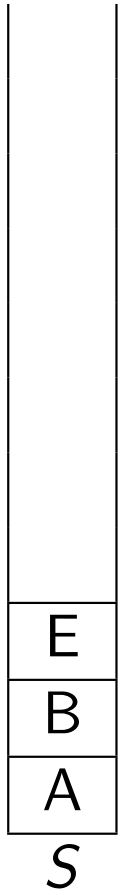


Průchod grafem do hloubky, krok 5

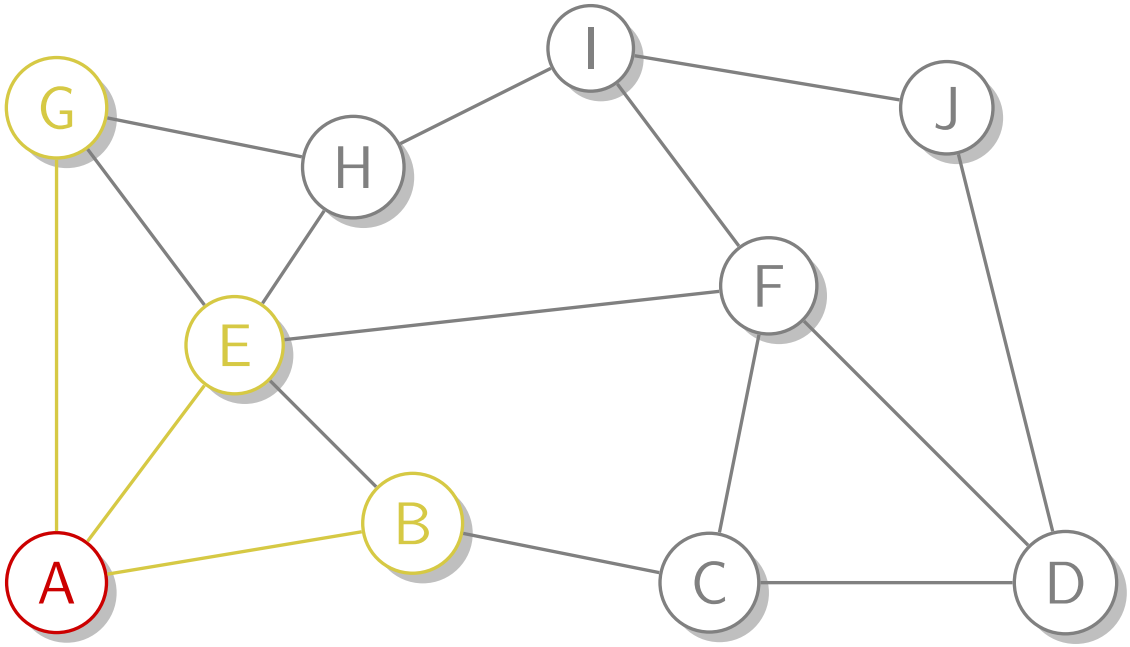


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

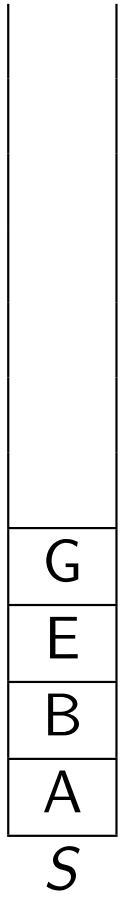


Průchod grafem do hloubky, krok 6

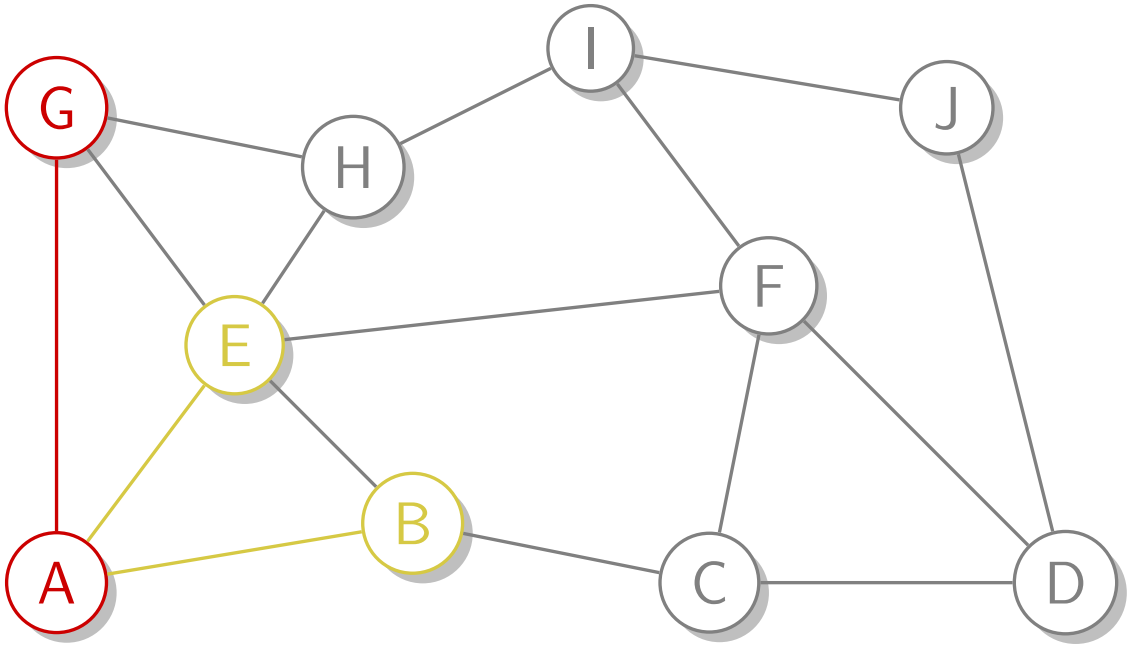


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	A
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

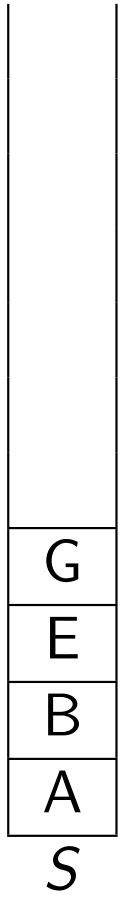


Průchod grafem do hloubky, krok 7

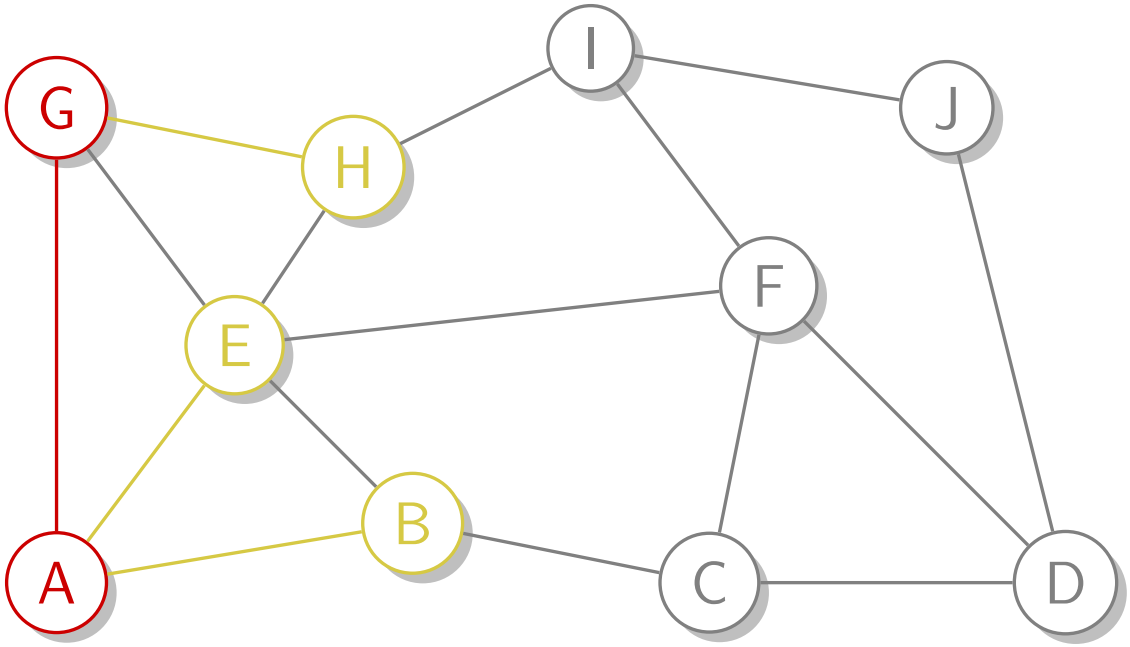


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

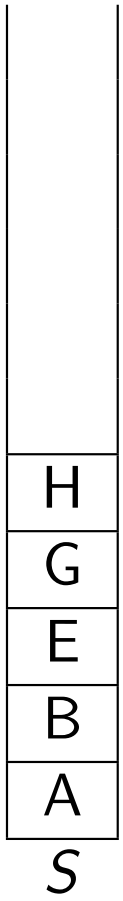


Průchod grafem do hloubky, krok 8

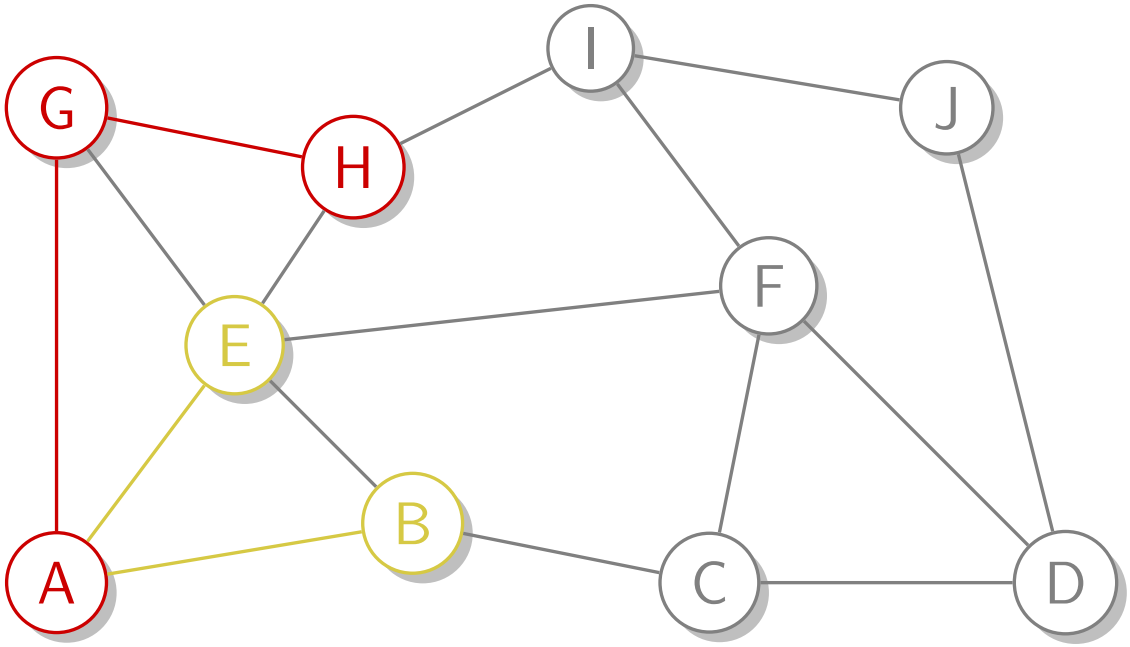


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	∞	∞	G
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

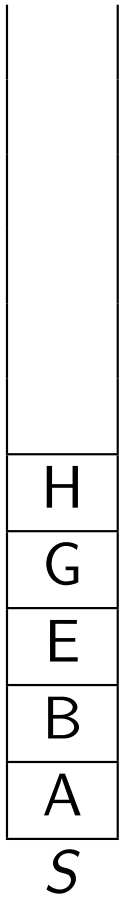


Průchod grafem do hloubky, krok 9

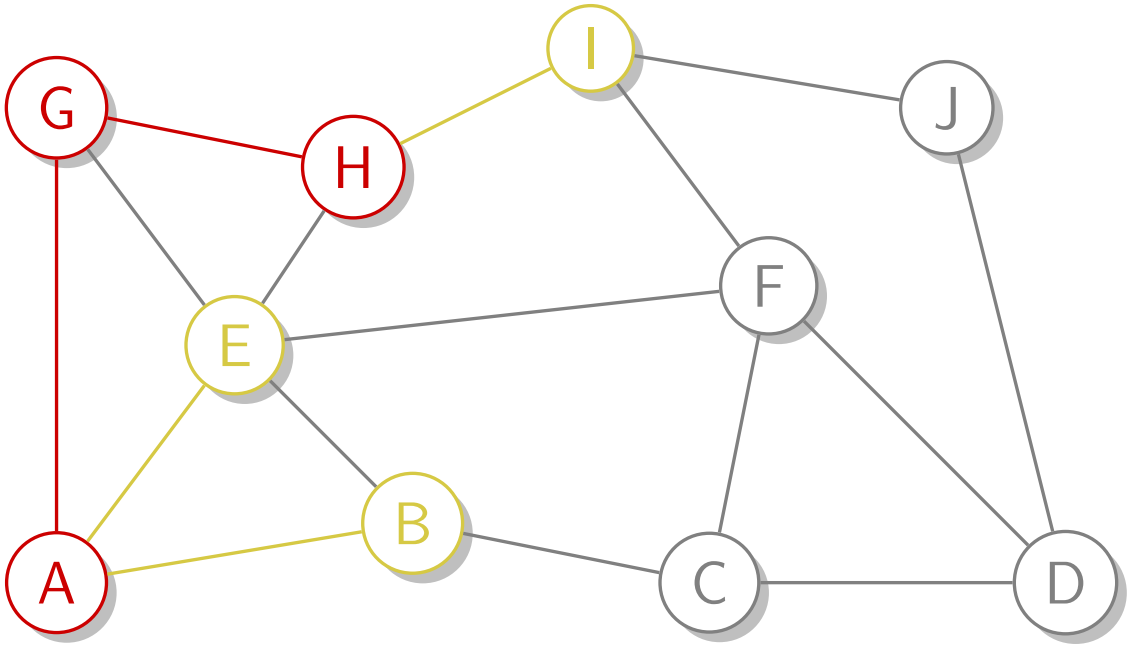


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

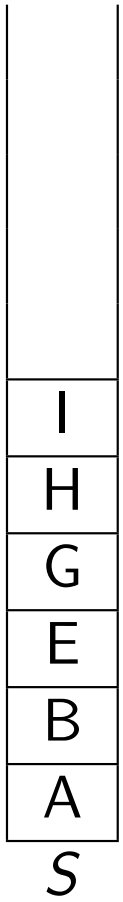


Průchod grafem do hloubky, krok 10

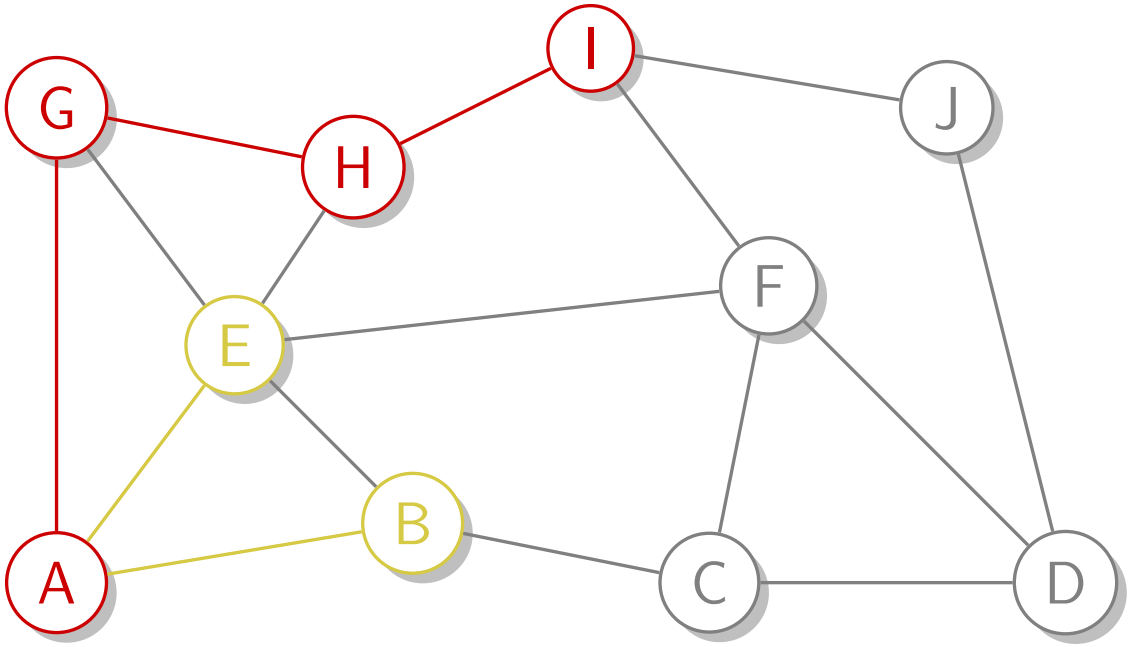


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	∞	∞	H
J	∞	∞	/

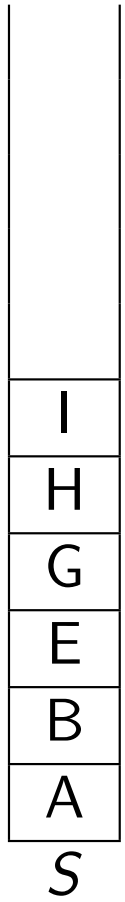


Průchod grafem do hloubky, krok 11

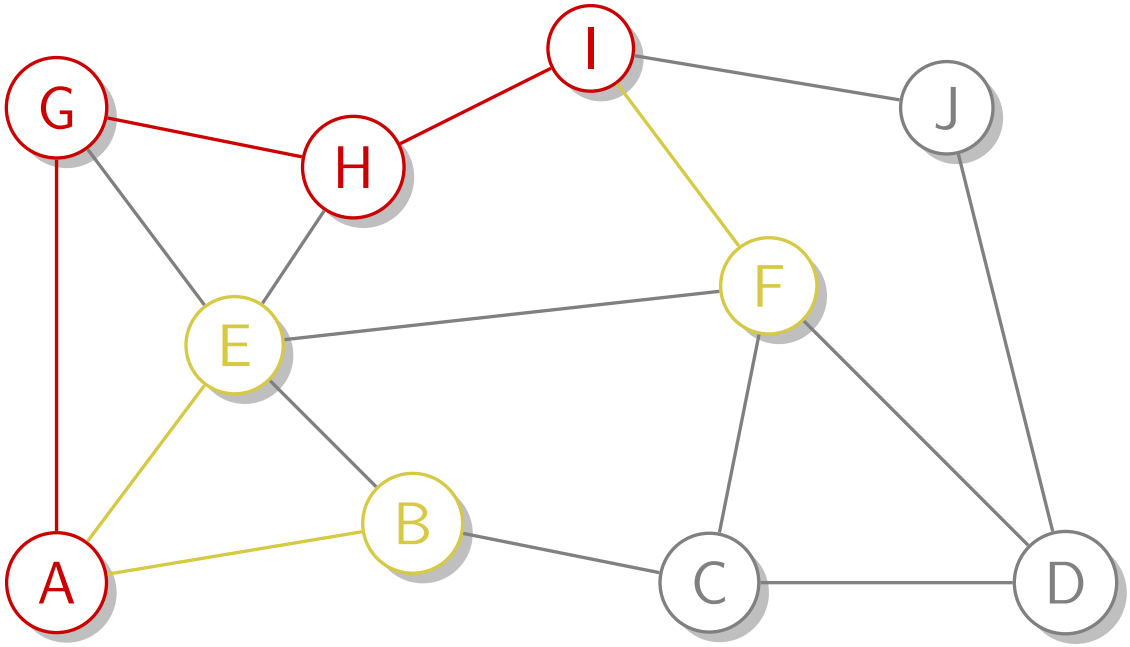


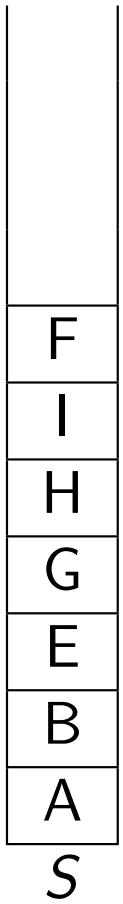
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	∞	∞	/



Průchod grafem do hloubky, krok 12

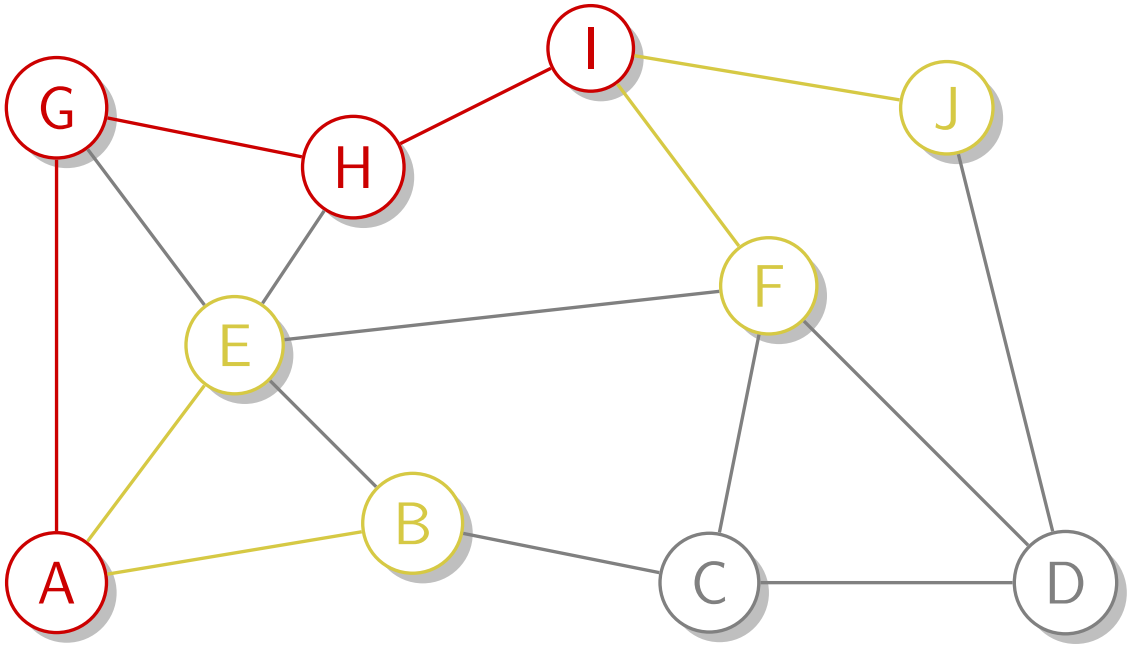




v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

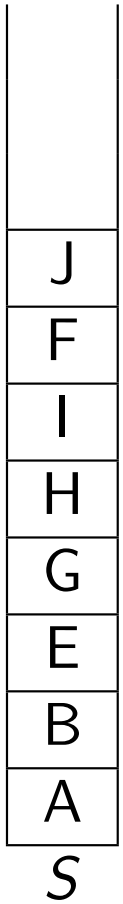
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	∞	∞	/

Průchod grafem do hloubky, krok 13

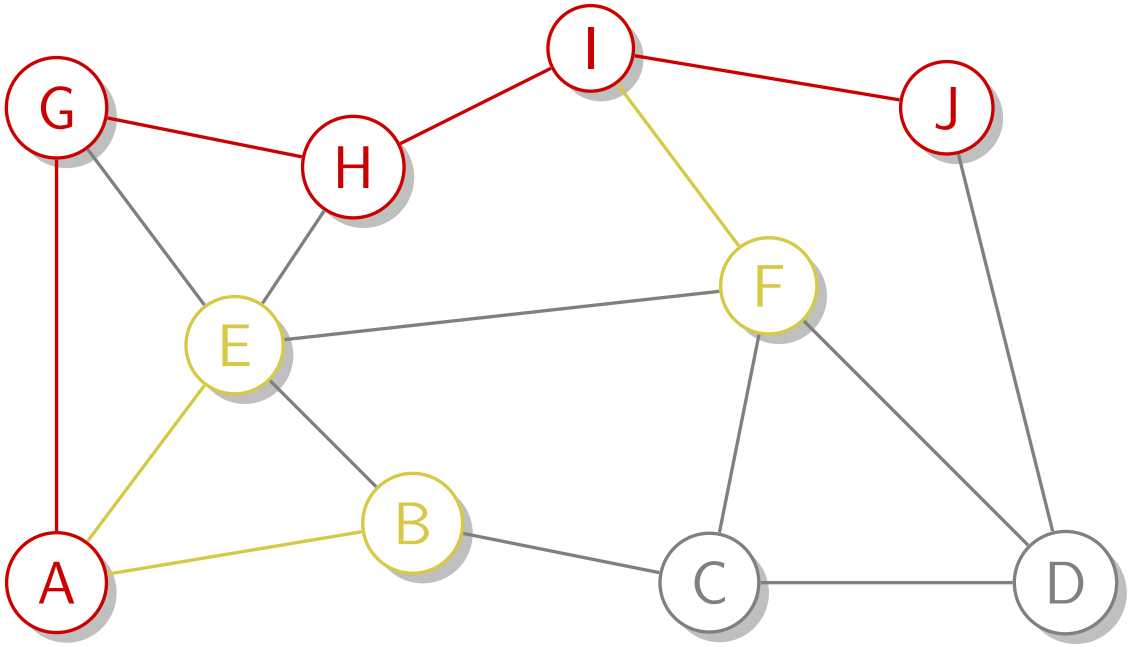


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	∞	∞	I

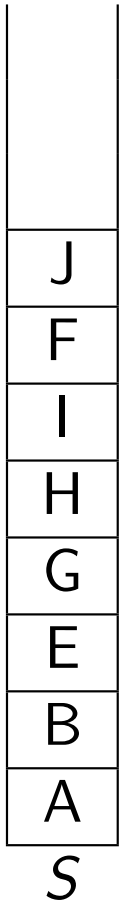


Průchod grafem do hloubky, krok 14

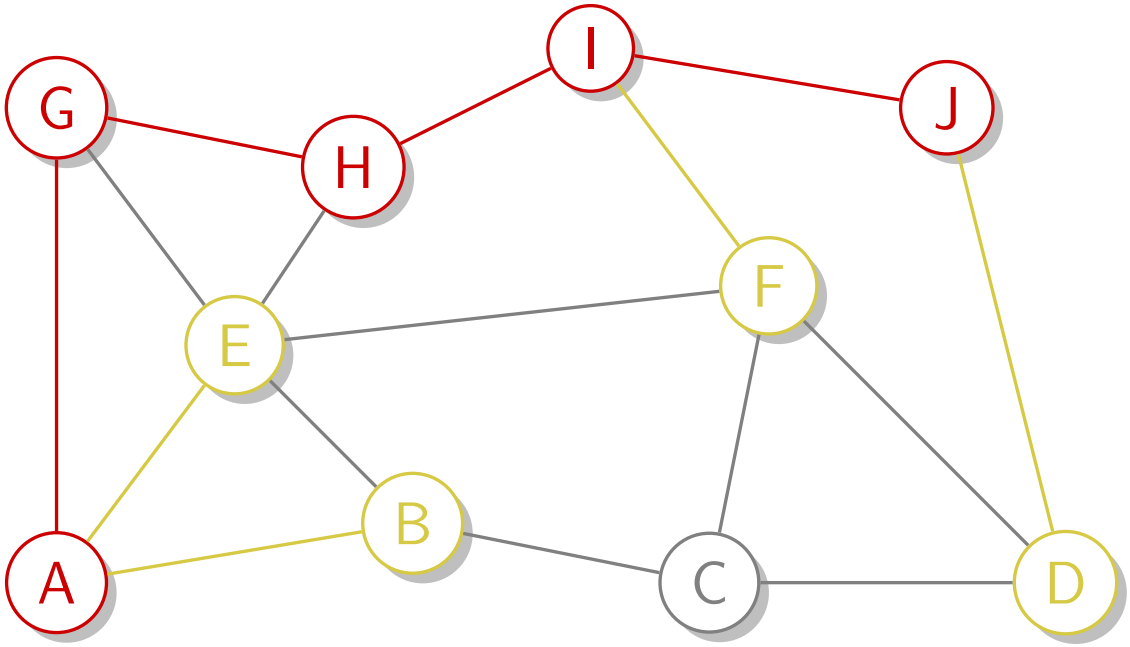


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

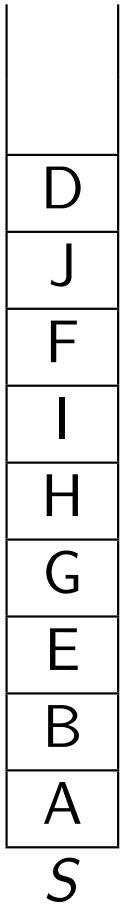


Průchod grafem do hloubky, krok 15

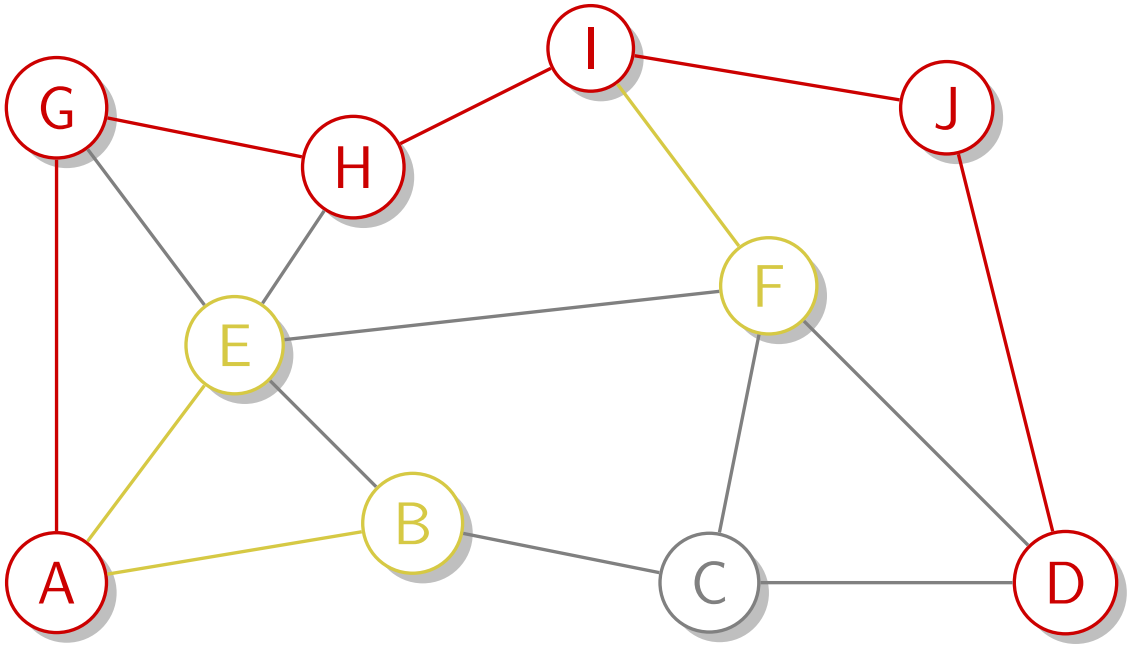


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

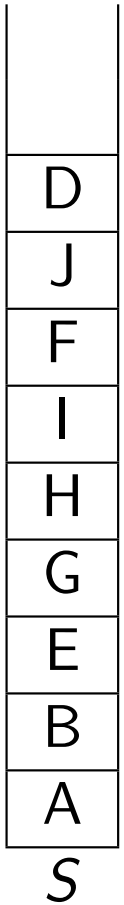


Průchod grafem do hloubky, krok 16

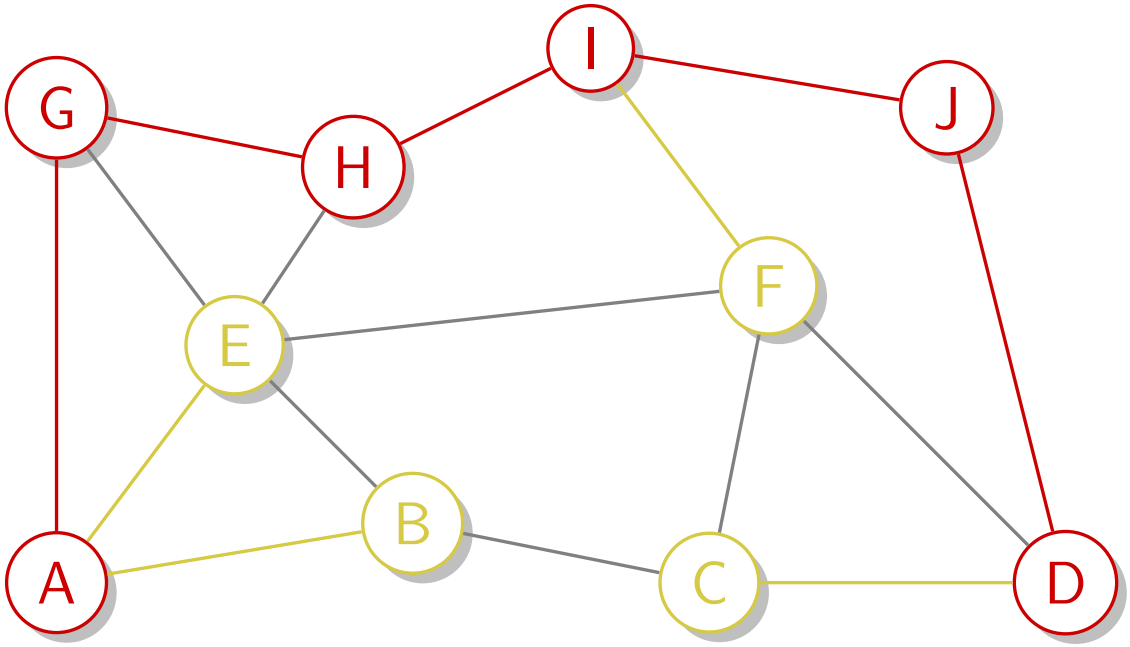


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	6	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I



Průchod grafem do hloubky, krok 17



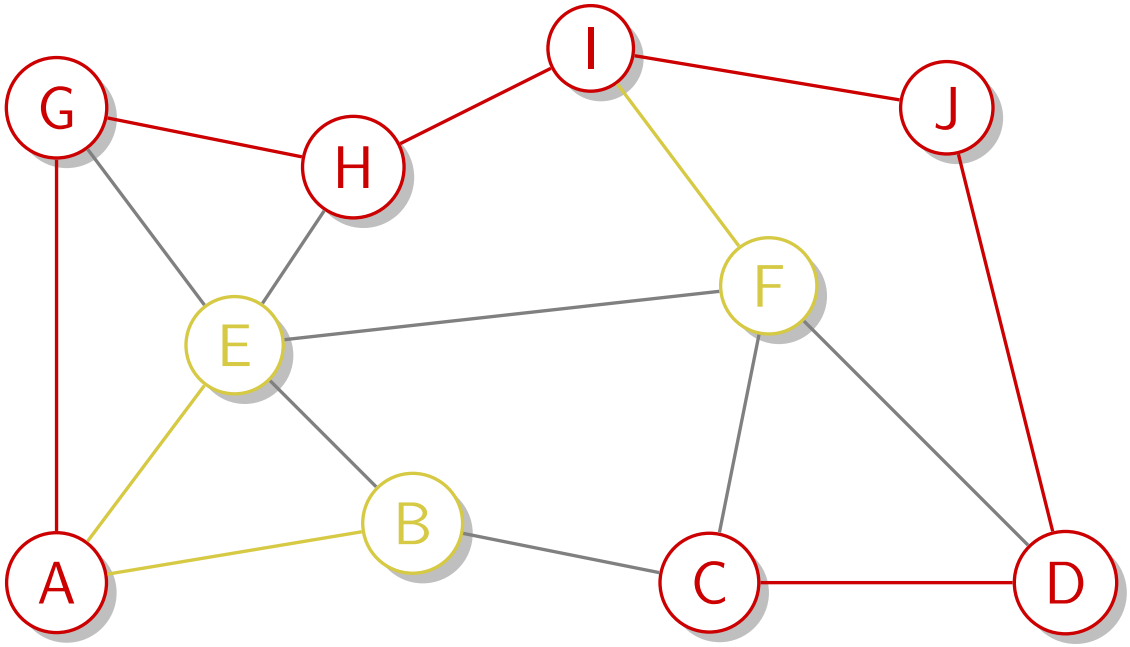
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	D
D	6	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

C
D
J
F
I
H
G
E
B
A

S

Průchod grafem do hloubky, krok 18



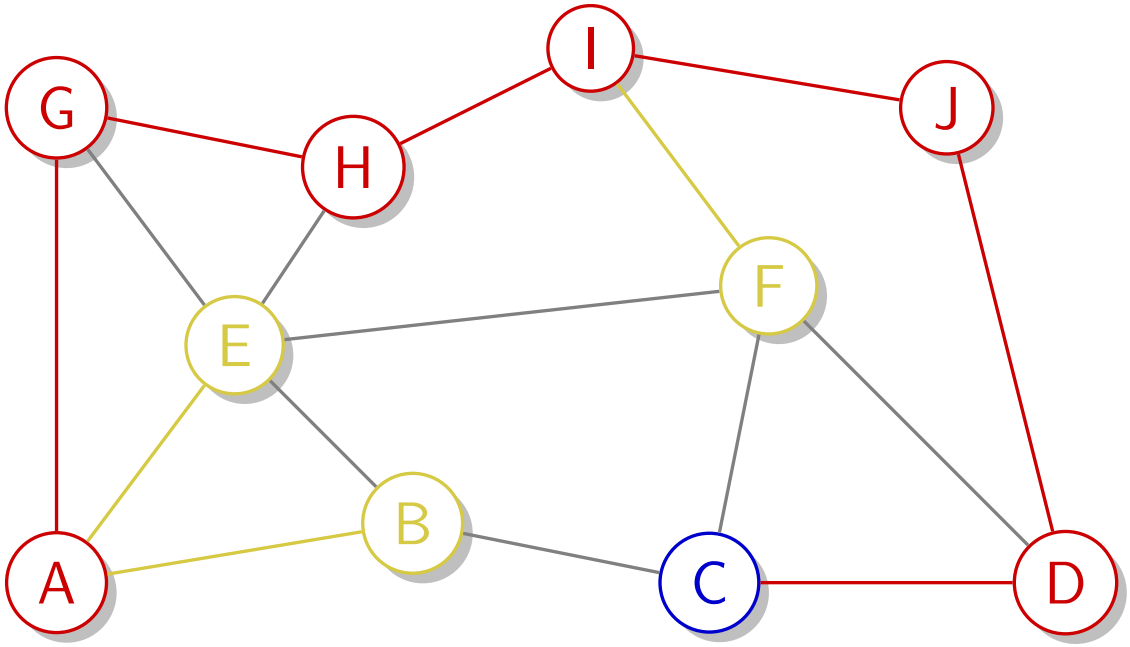
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	∞	D
D	6	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

C
D
J
F
I
H
G
E
B
A

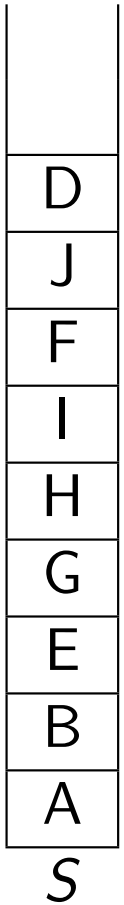
S

Průchod grafem do hloubky, krok 19

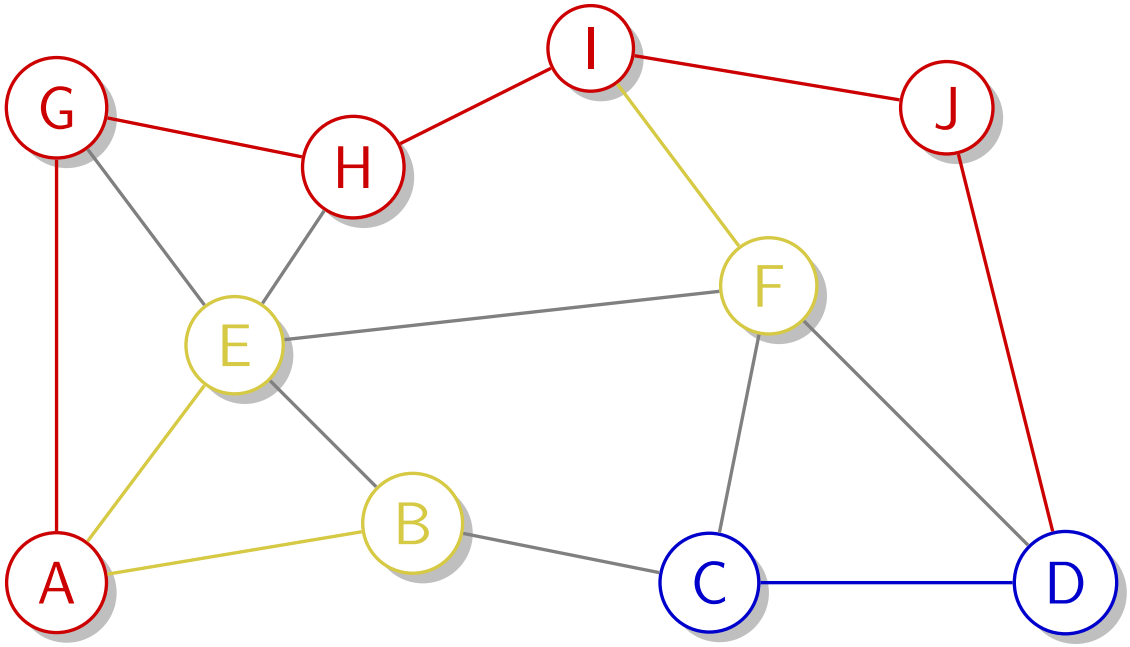


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

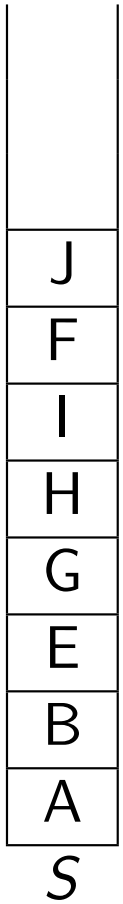


Průchod grafem do hloubky, krok 20

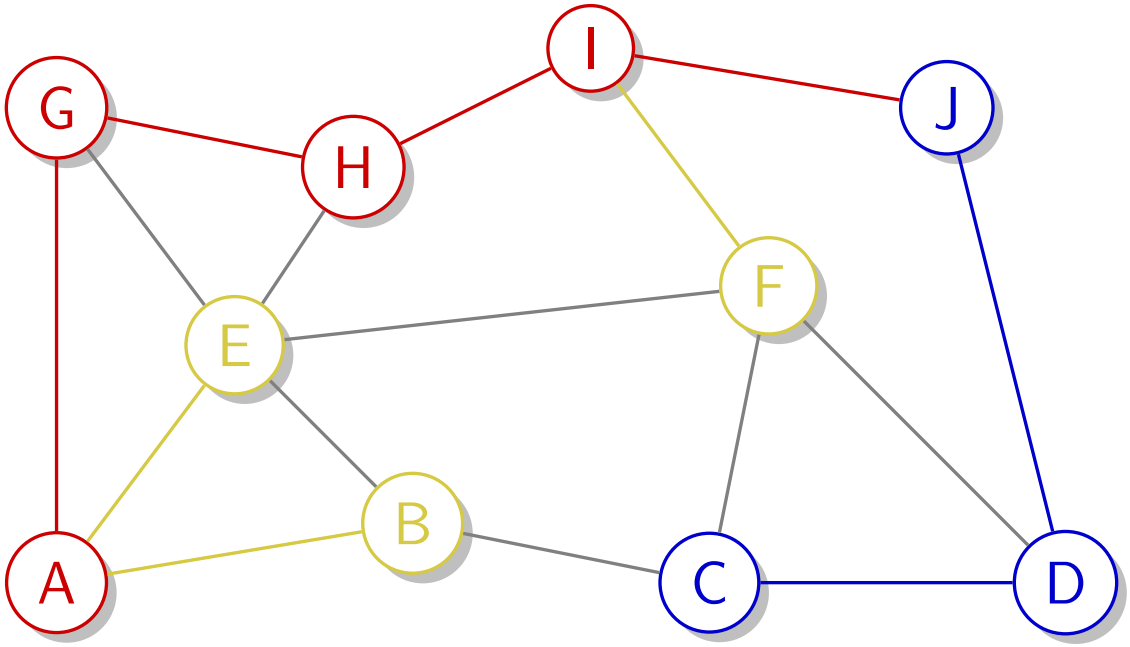


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

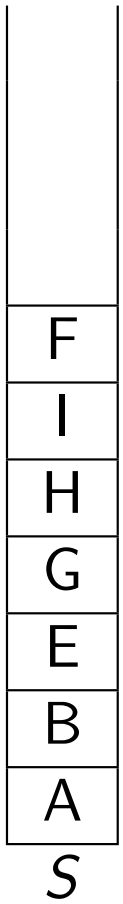


Průchod grafem do hloubky, krok 21

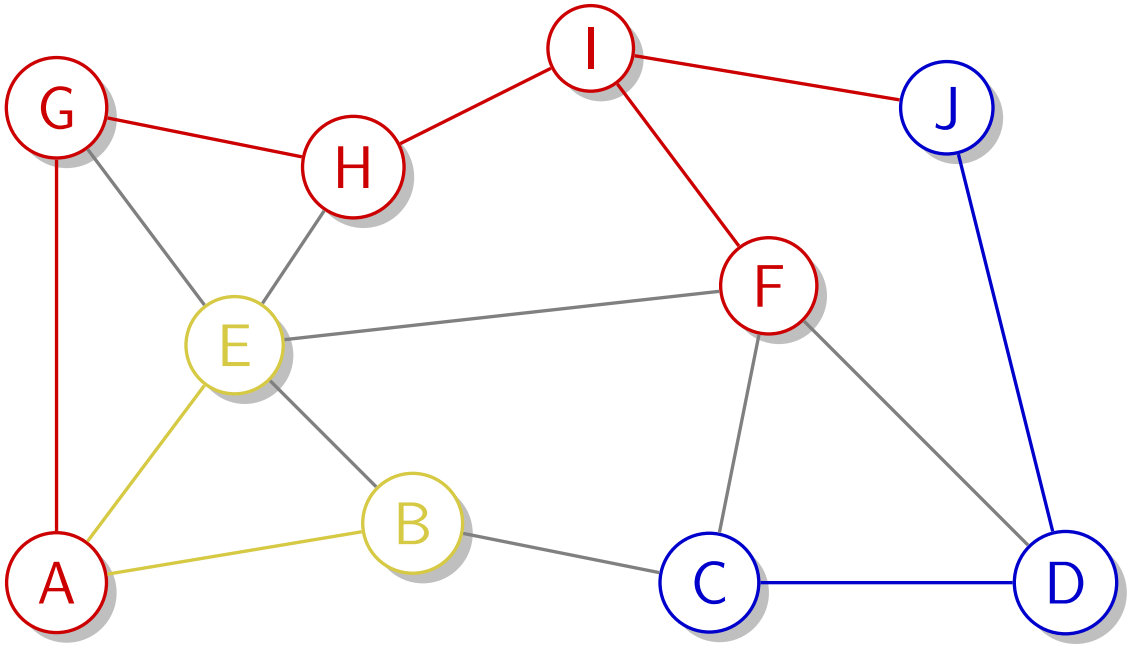


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	10	I

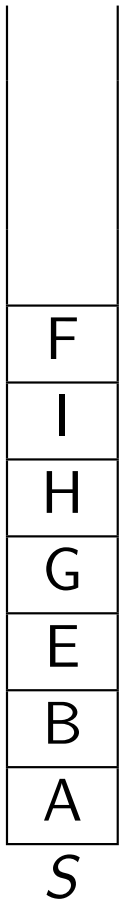


Průchod grafem do hloubky, krok 22

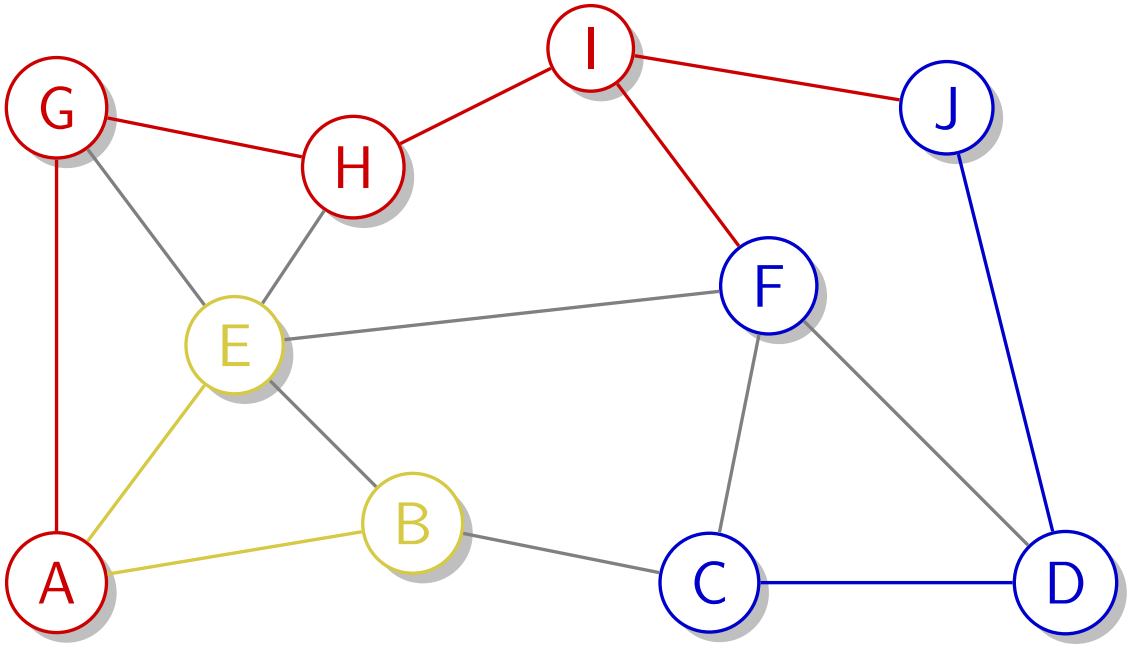


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	10	I

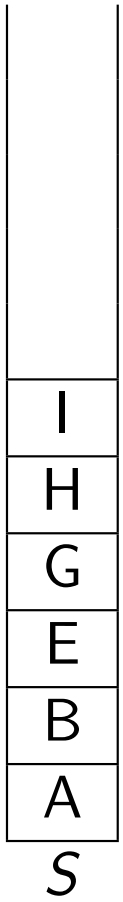


Průchod grafem do hloubky, krok 23

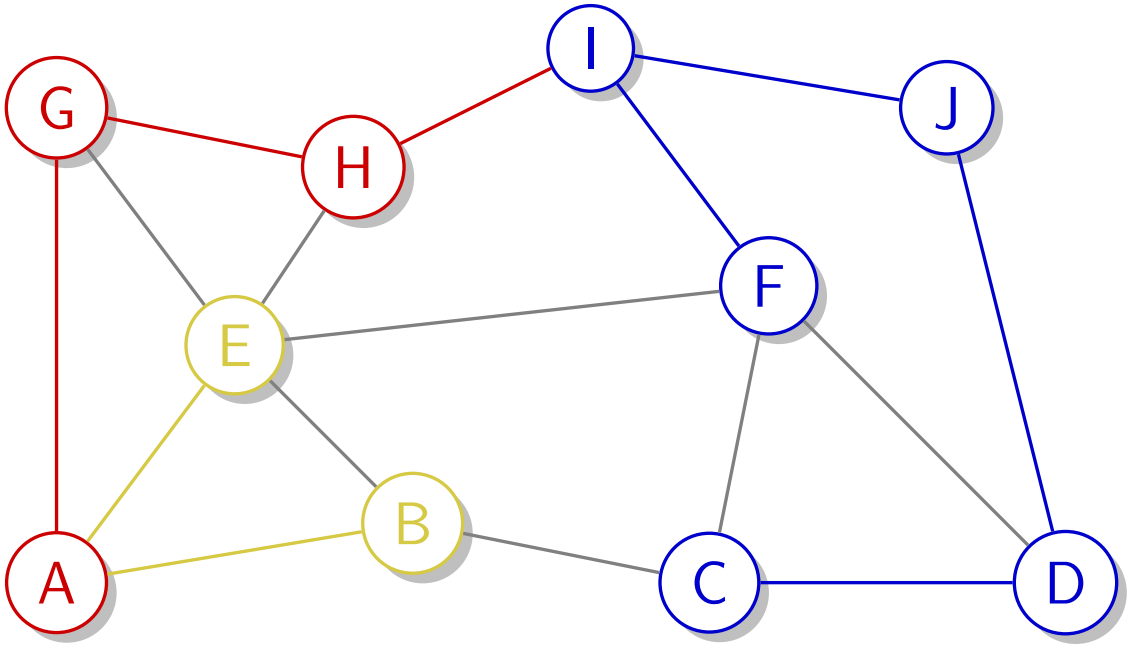


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	10	I

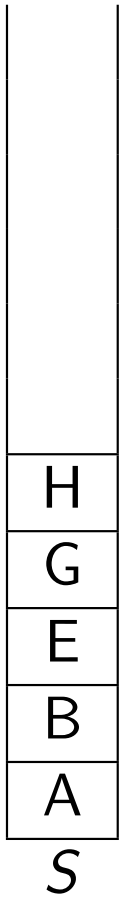


Průchod grafem do hloubky, krok 24

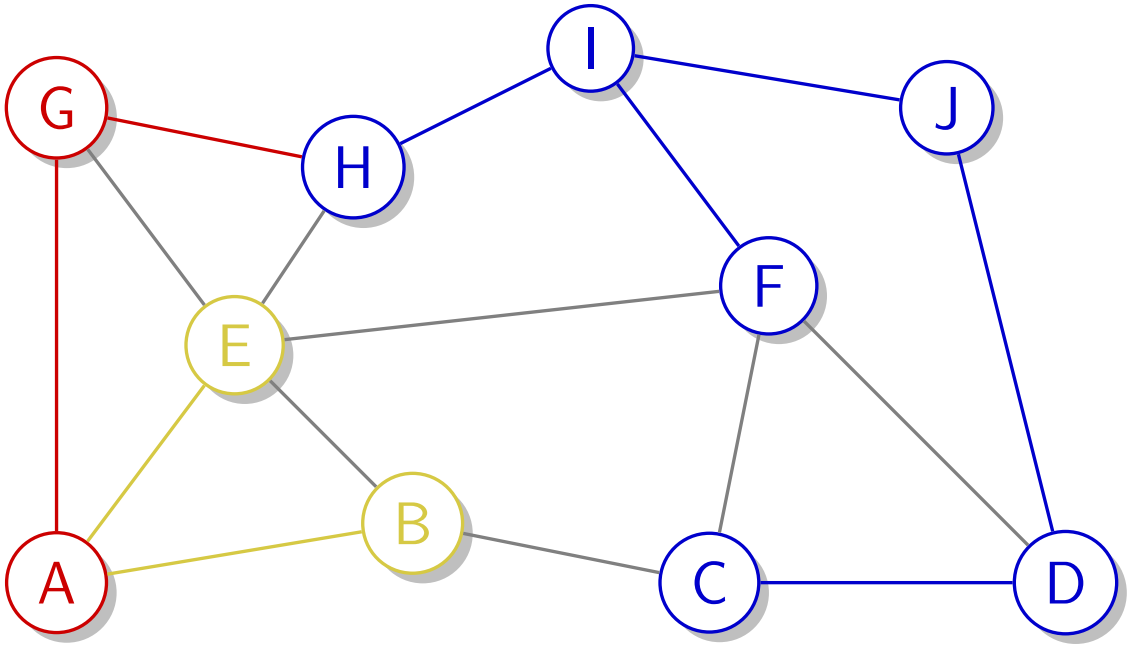


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	13	H
J	5	10	I

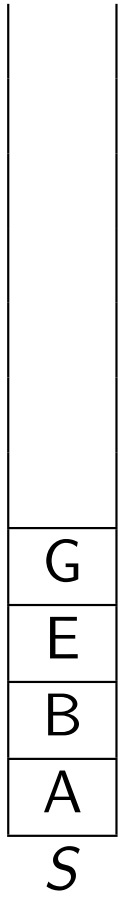


Průchod grafem do hloubky, krok 25

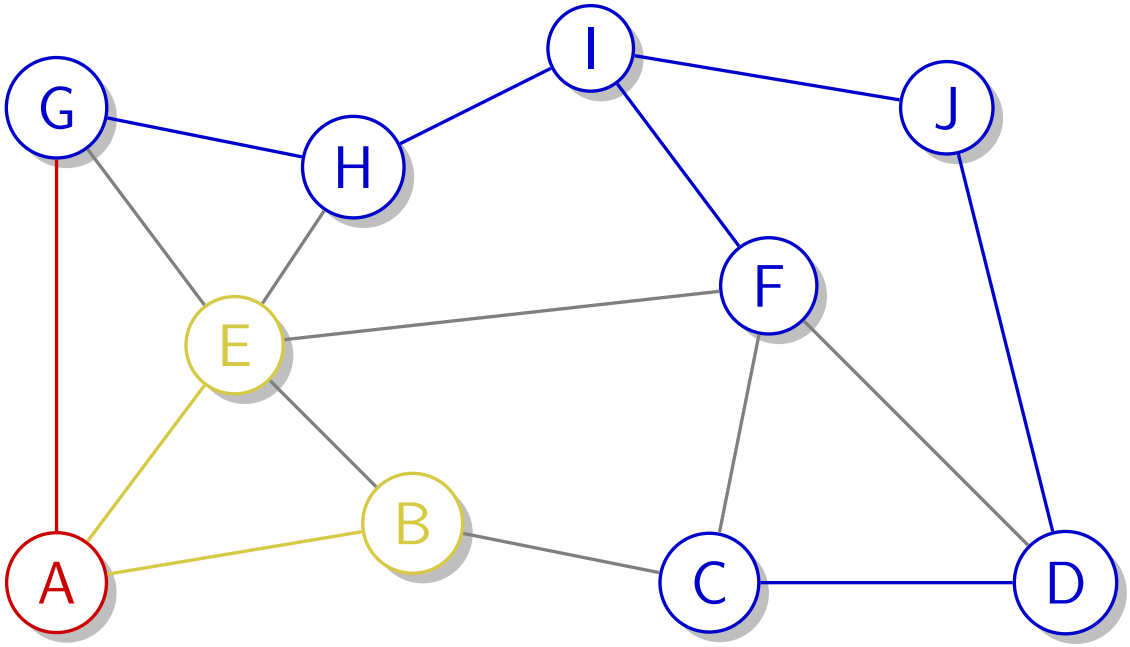


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	∞	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

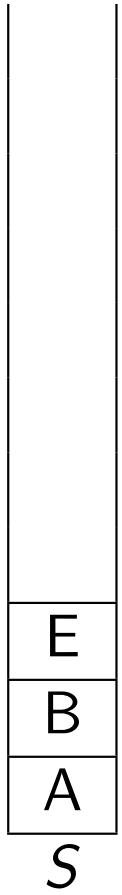


Průchod grafem do hloubky, krok 26

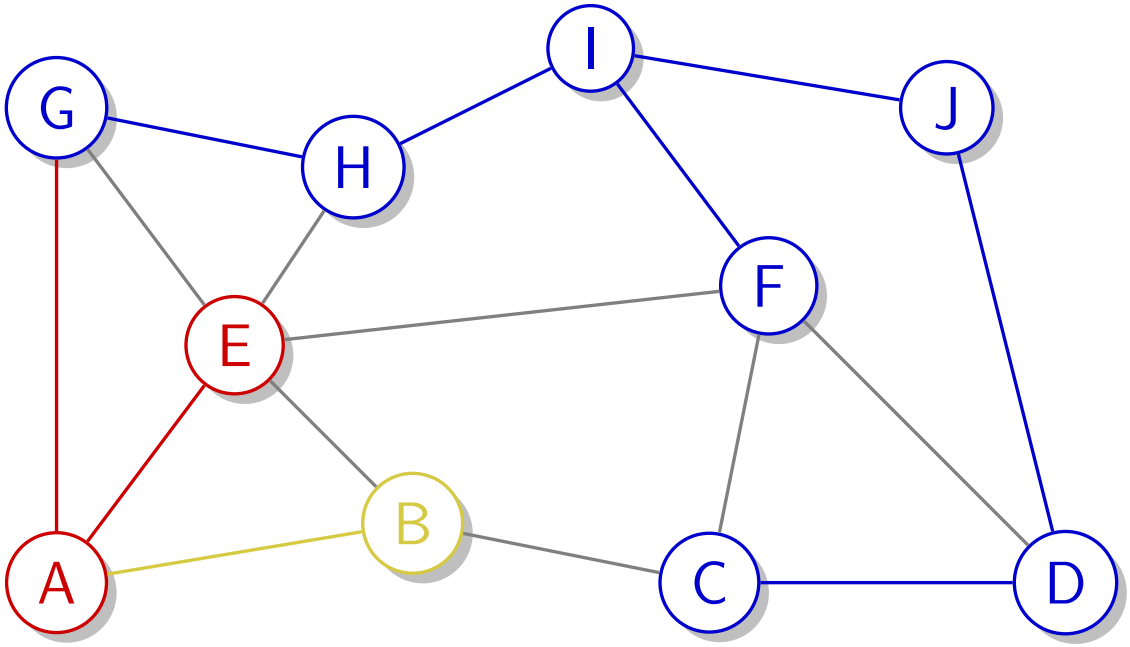


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

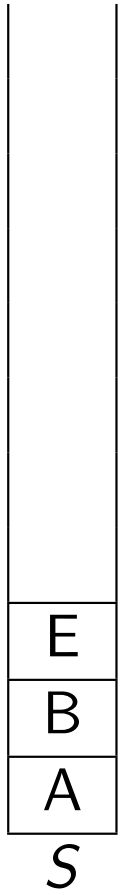


Průchod grafem do hloubky, krok 27

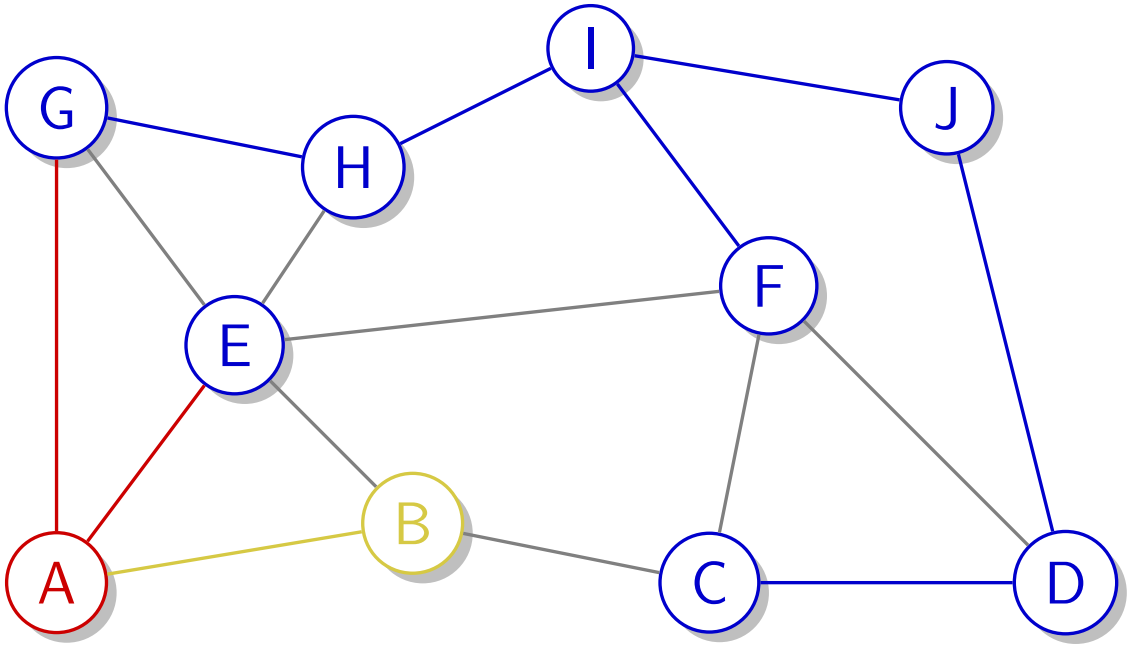


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

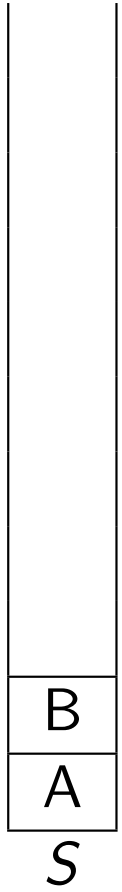


Průchod grafem do hloubky, krok 28

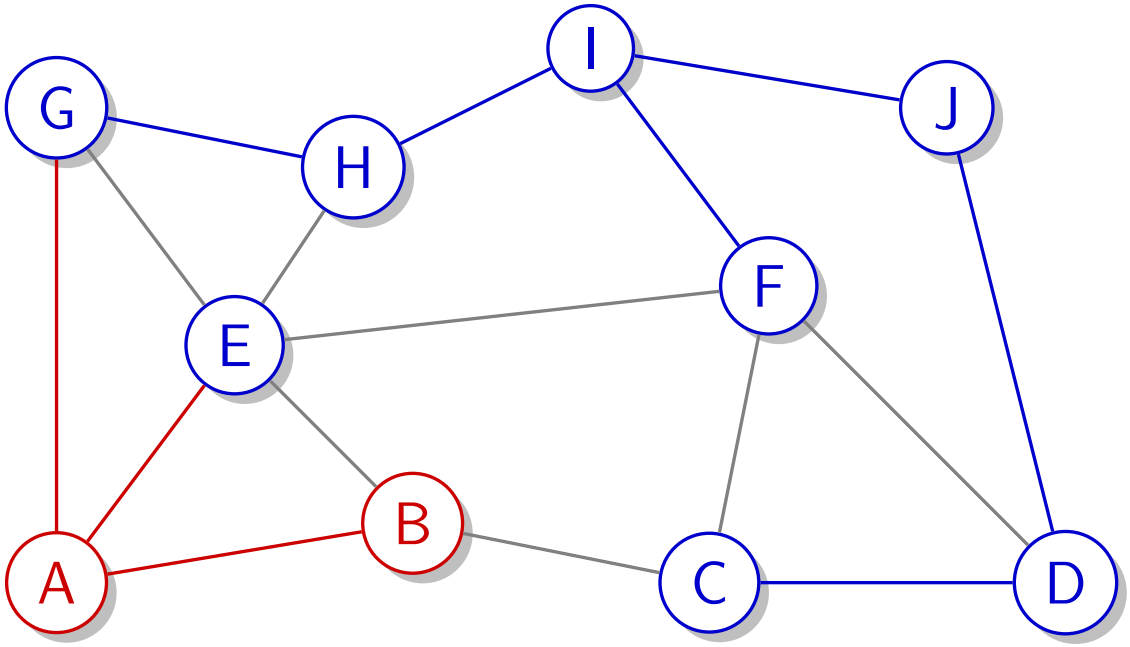


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	17	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

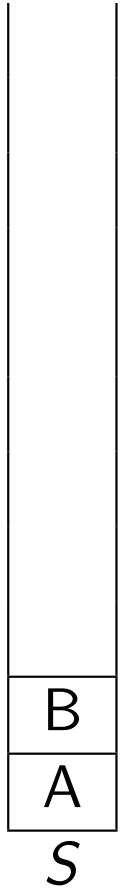


Průchod grafem do hloubky, krok 29

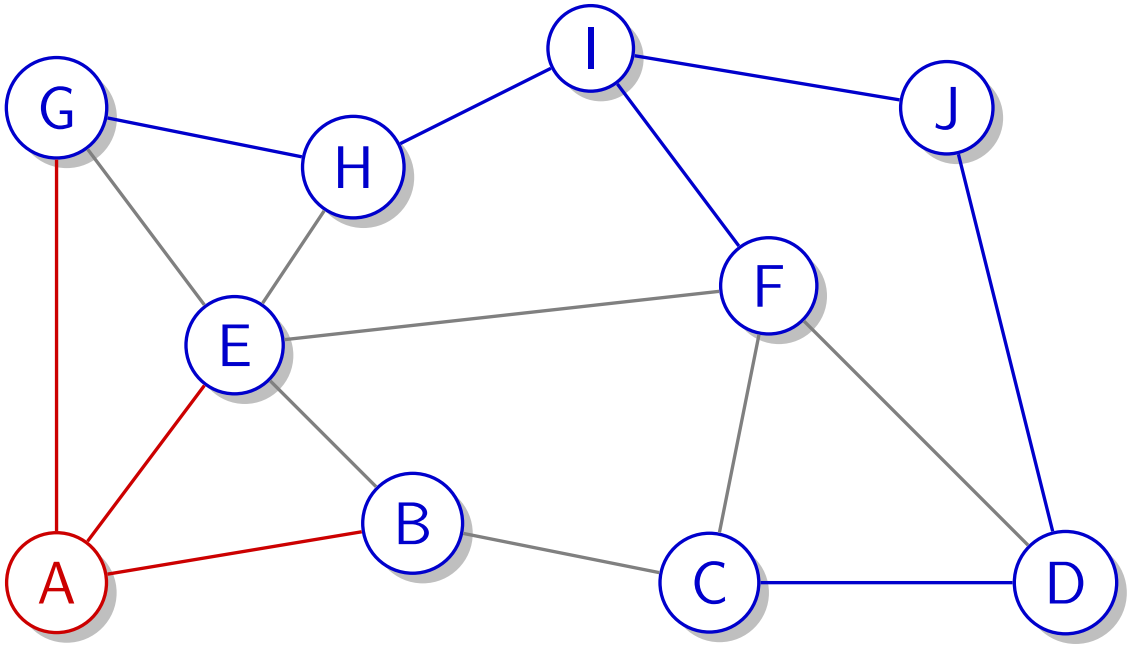


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	18	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	17	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

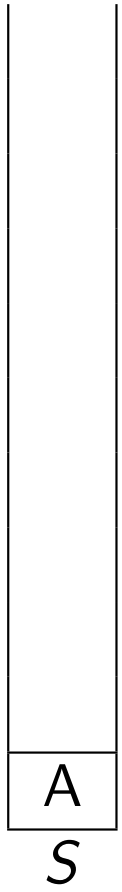


Průchod grafem do hloubky, krok 30

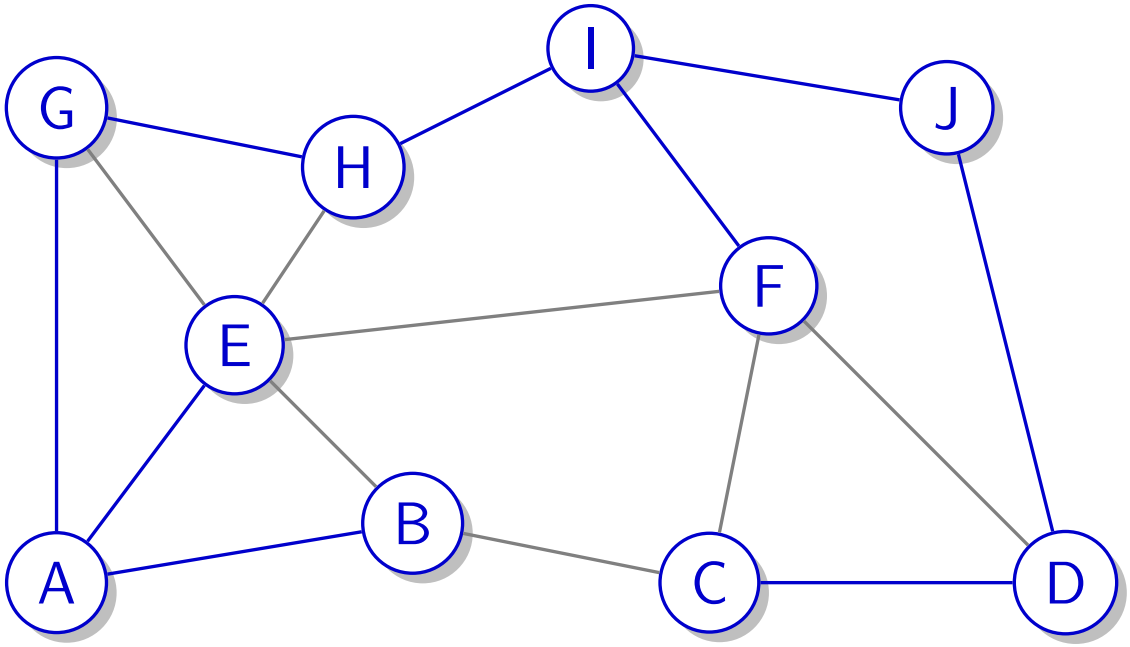


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	18	19	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	17	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

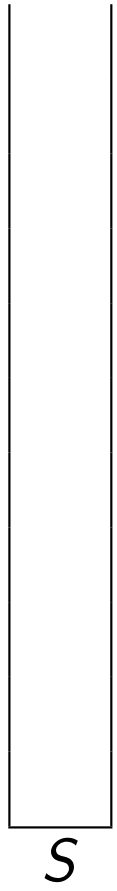


Průchod grafem do hloubky, krok 31



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	20	/
B	18	19	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	17	A

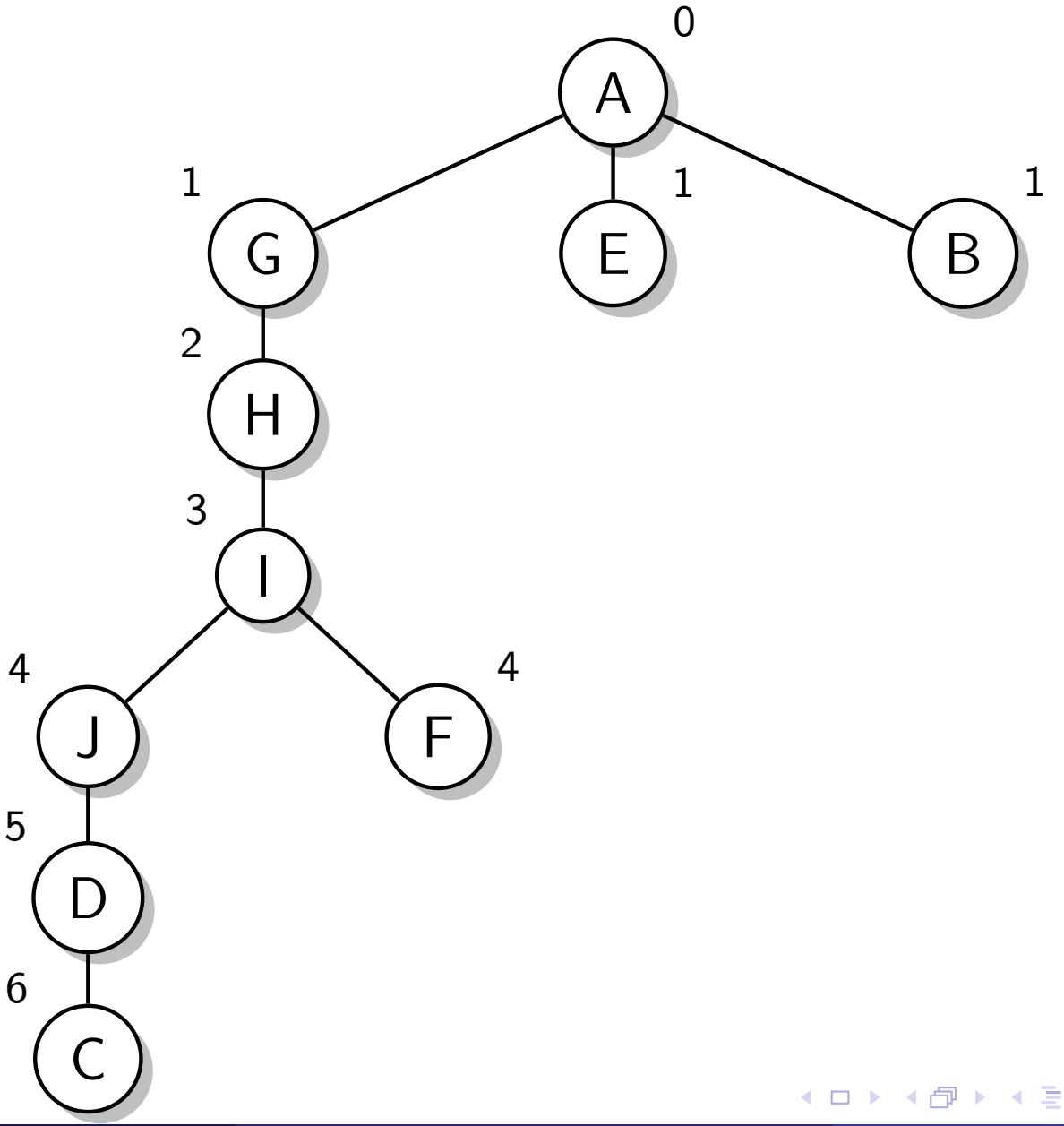
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I



Průchod grafem do hloubky

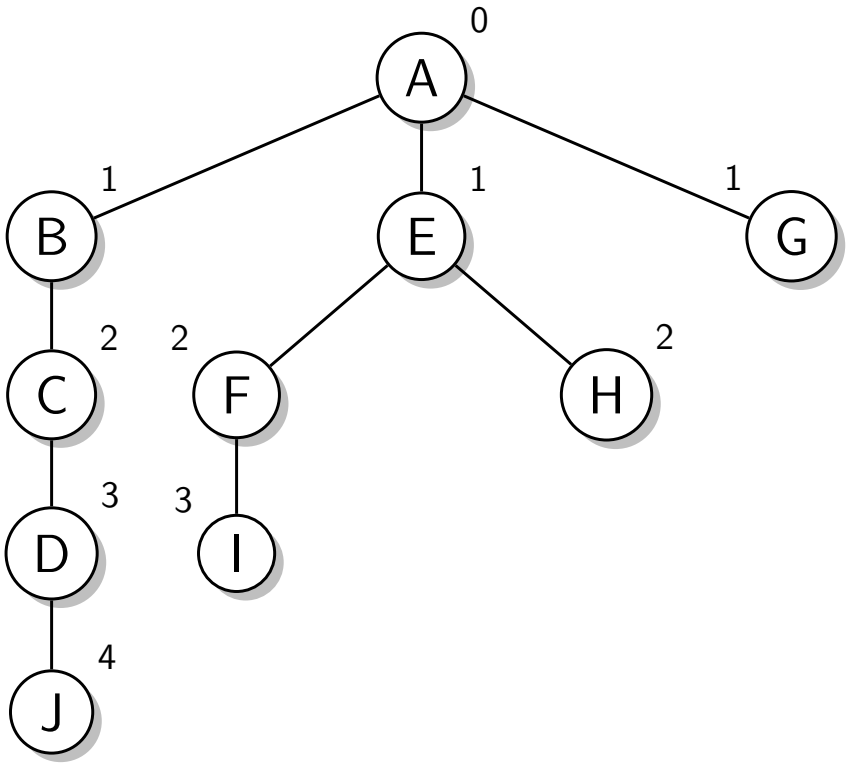
- Výstupem algoritmu je tzv. DF-strom, jedna z koster grafu.
- Závorková struktura stromu – Mějme vrchol u, pro všechny vrcholy v v podstromu s kořenem u platí, že $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$.
- Lze jednoduše zjišťovat vztah rodič–potomek. Indexování XML dokumentů.
- Klasifikace hran: dopředné (součást DF-stromu), zpětné (hrany mimo DF-strom)
- Složitost algoritmu: $O(|V| + |E|)$.

Průchod grafem do hloubky – DF-strom

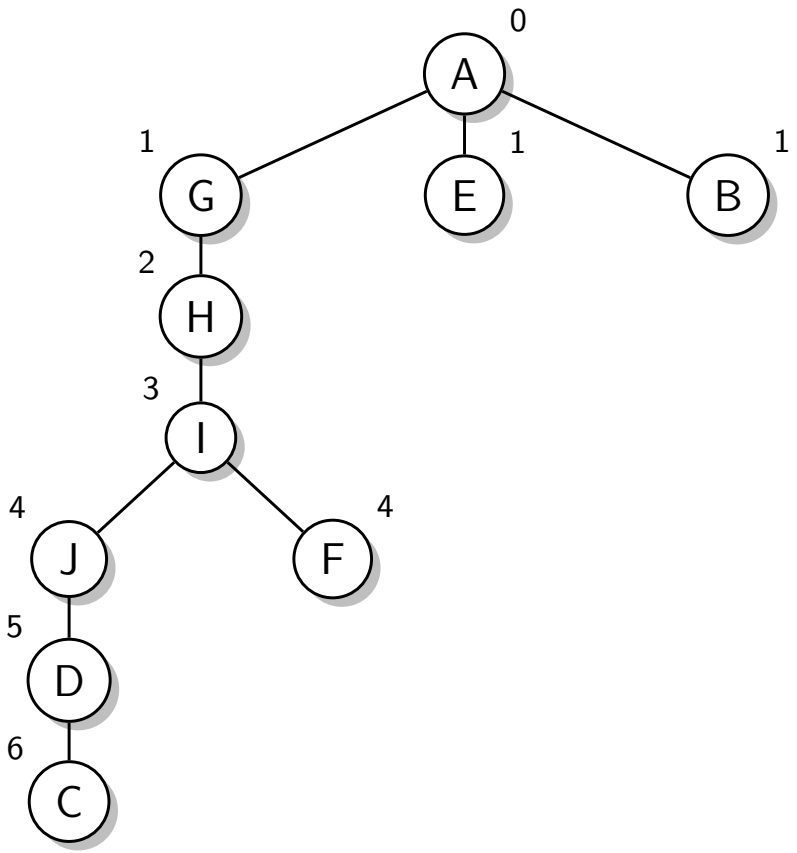


Srovnání průchodů grafem

Průchod do šířky



Průchod do hloubky

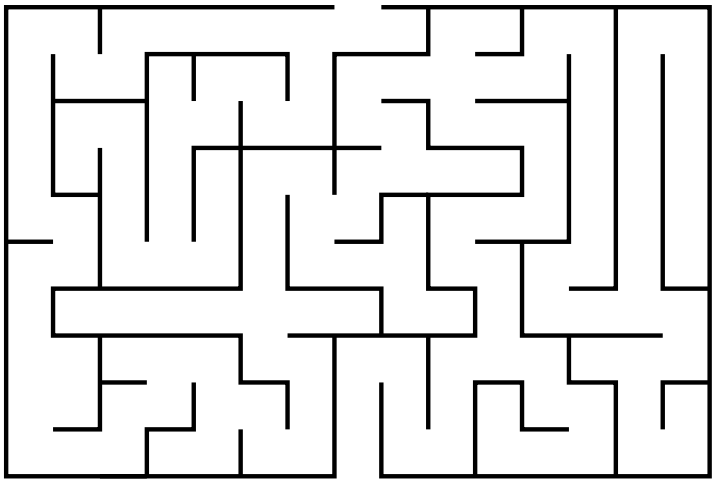


Aplikace

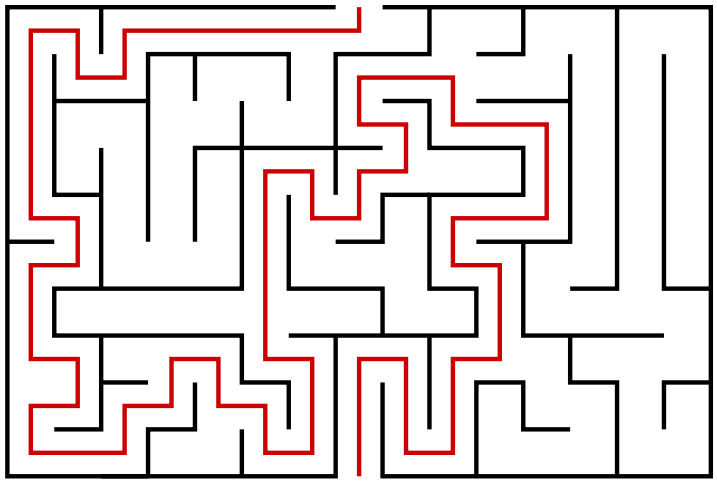
- Hledání cesty v bludišti
- Počítačová grafika – vyplňování oblasti

Hledání cesty v bludišti

Bludiště



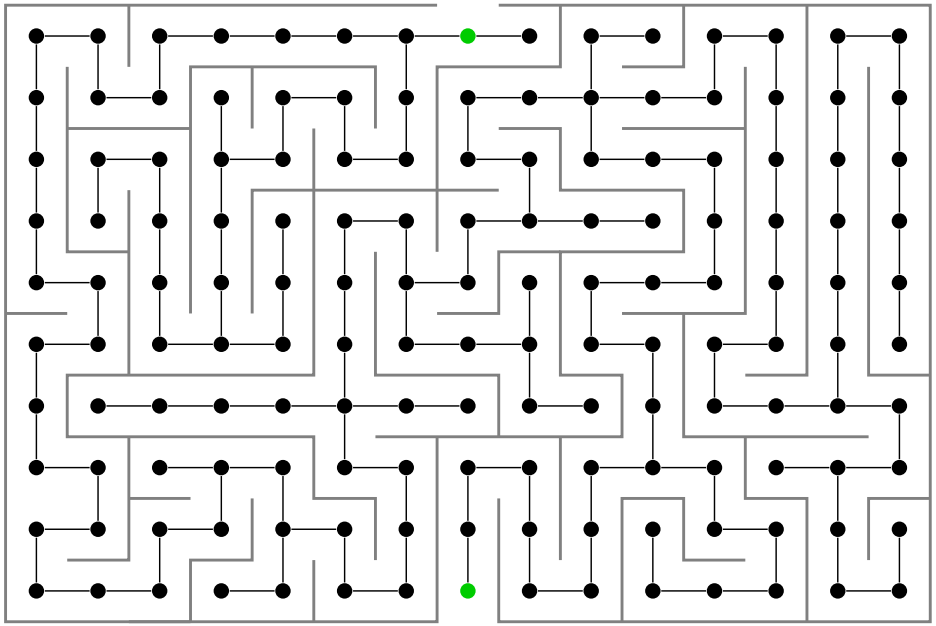
Nalezená cesta bludištěm



Zadání úlohy

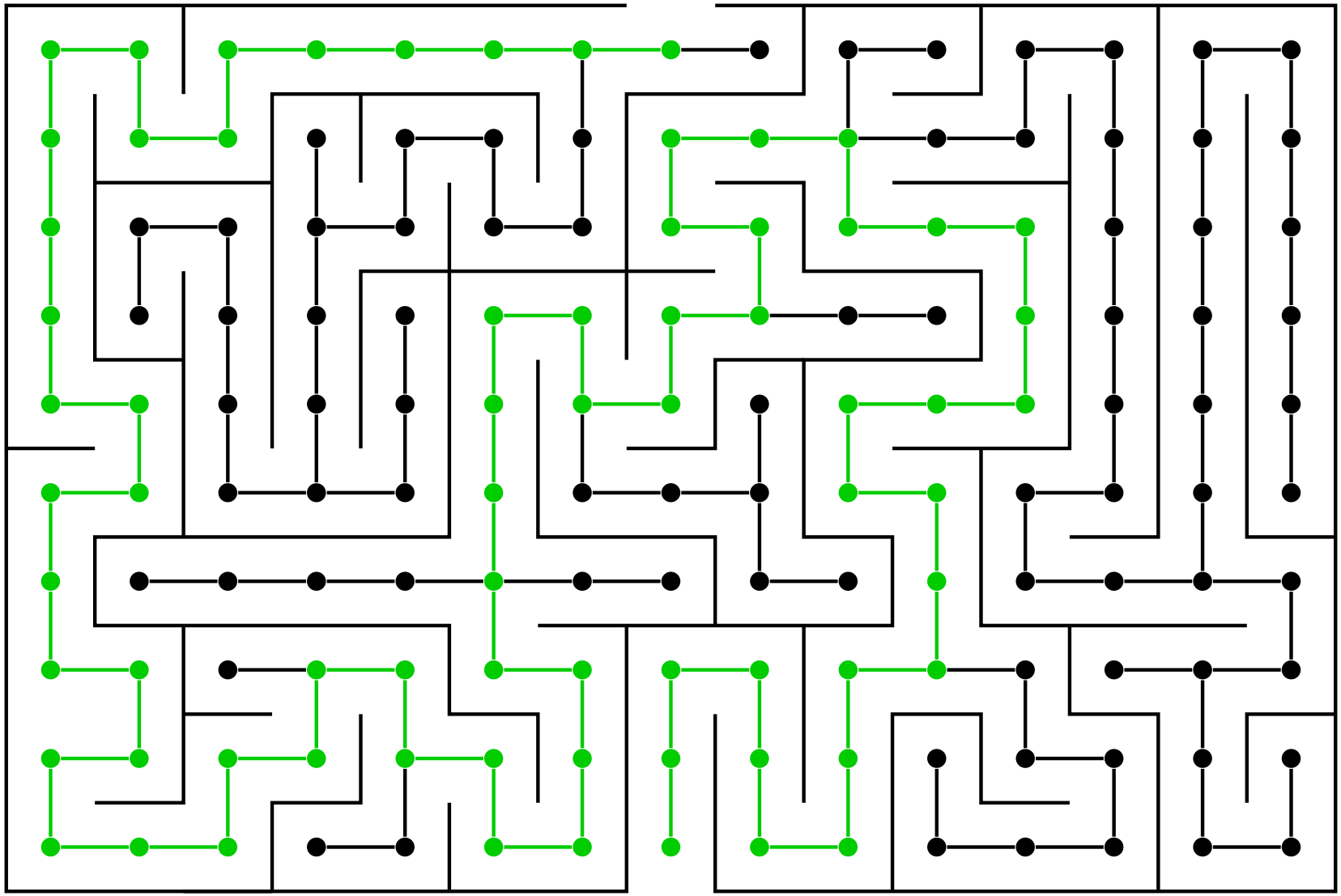
Máme najít cestu daným bludištěm od daného vchodu k danému východu nebo dospět k závěru, že cesta neexistuje.

Bludiště jako graf



- Bludiště převedeme na graf:
  - vrcholy
  - hrany
- Zvolíme některý z algoritmů průchodu grafem
  1. označíme si vchod a východ
  2. provedeme algoritmus
  3. pomocí odkazů π na předchůdce zrekonstruujeme cestu od východu ke vchodu

Hledání cesty v bludišti – řešení



Animace průchodu grafem do šířky – legenda

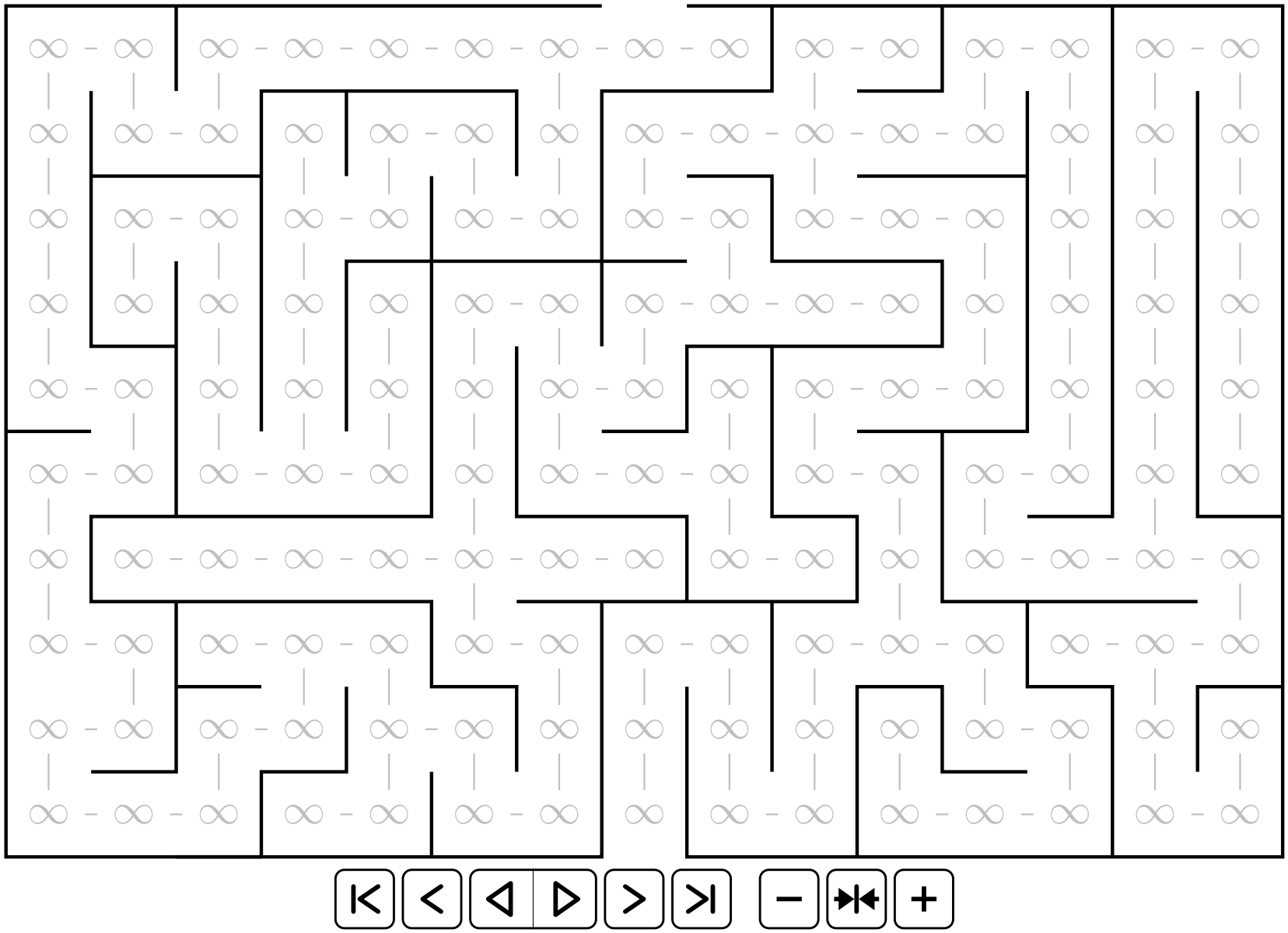
Vrcholy grafu:

šedá	dosud neprozkoumaný vrchol
žlutá	vrchol čekající ve frontě na zpracování
červená	právě zpracovávaný vrchol
modrá	zpracovaný vrchol
zelená	vrchol na cestě mezi vchodem a východem z bludiště
n	vzdálenost (počet hran) od vchodu do bludiště

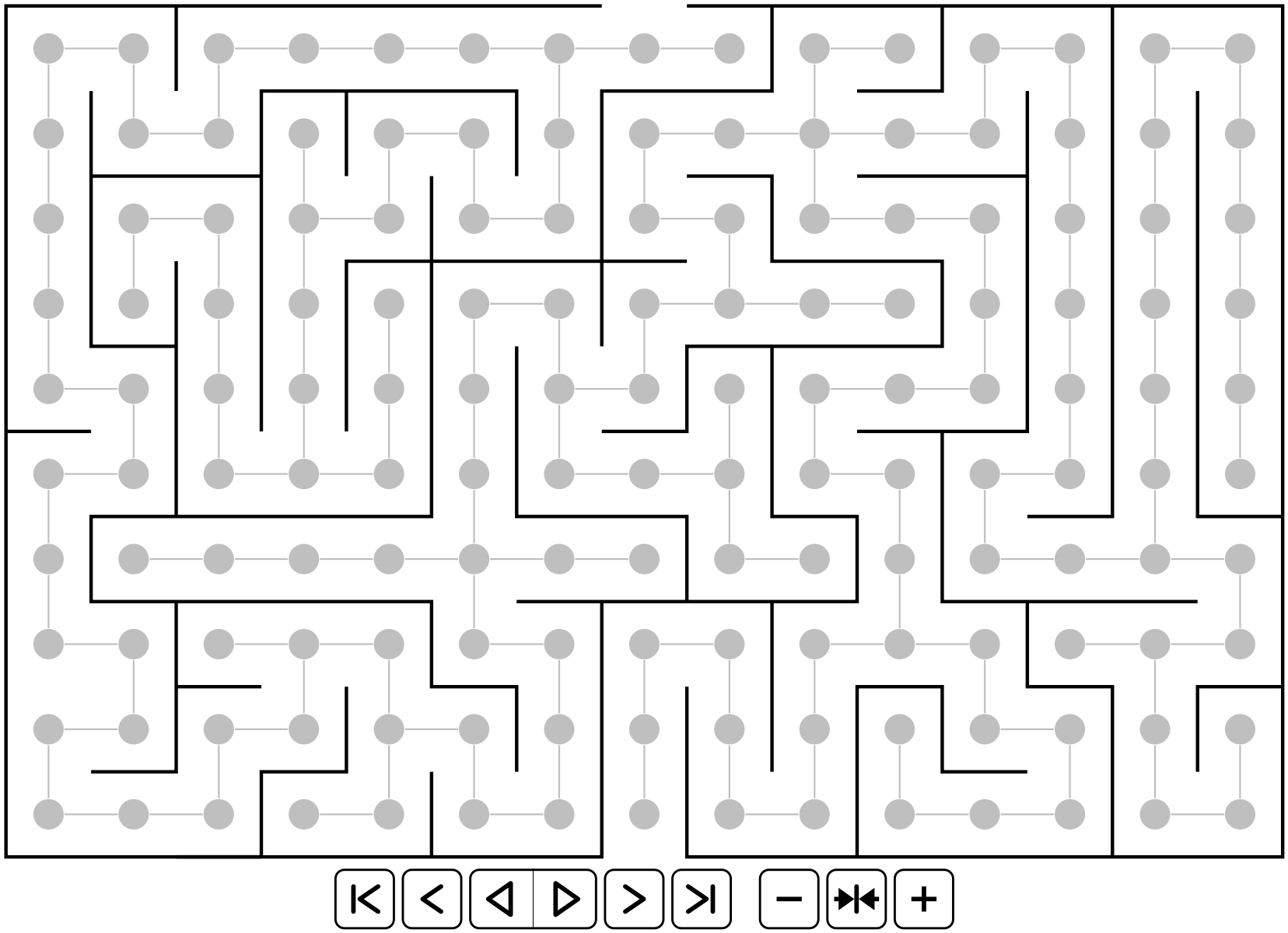
Hrany grafu:

šedá	hrana mezi neprozkoumanými vrcholy
žlutá	hrana incidentní s čekajícím vrcholem
červená	hrana incidentní s právě zpracovávaným vrcholem
modrá	hrana mezi zpracovanými vrcholy
zelená	hrana na cestě mezi vchodem a východem z bludiště
$u \rightarrow v$	$\pi[u] = v$

Animace průchodu grafem do šířky



Animace průchodu grafem do šířky



Animace průchodu grafem do hloubky – legenda

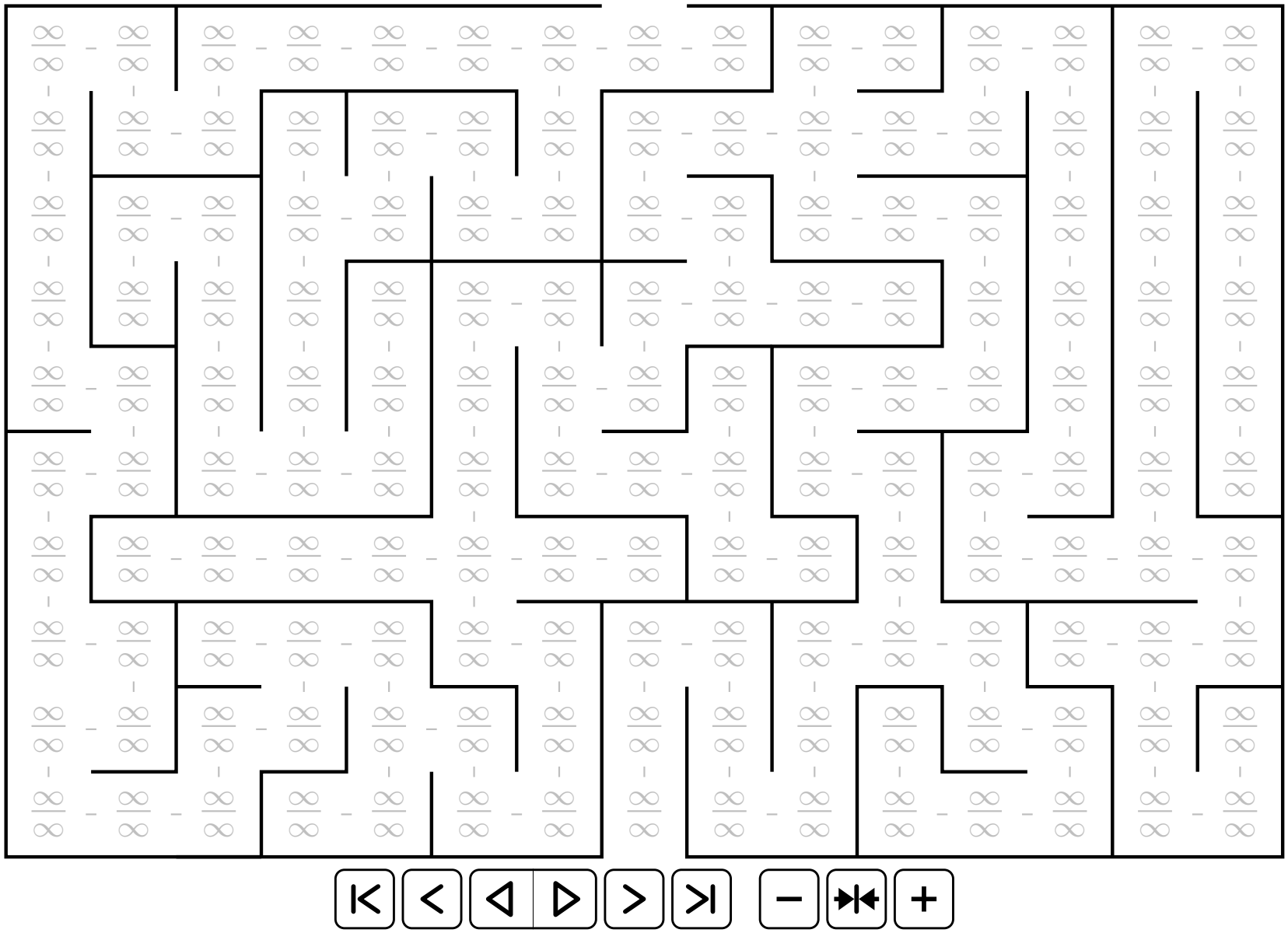
Vrcholy grafu:

šedá	dosud neprozkoumaný vrchol
žlutá	vrchol čekající ve frontě na zpracování
červená	právě zpracovávaný vrchol
modrá	zpracovaný vrchol
zelená	vrchol na cestě mezi vchodem a východem z bludiště
$\frac{d[u]}{f[u]}$	logický čas navštívení a dokončení průchodu vrcholem u

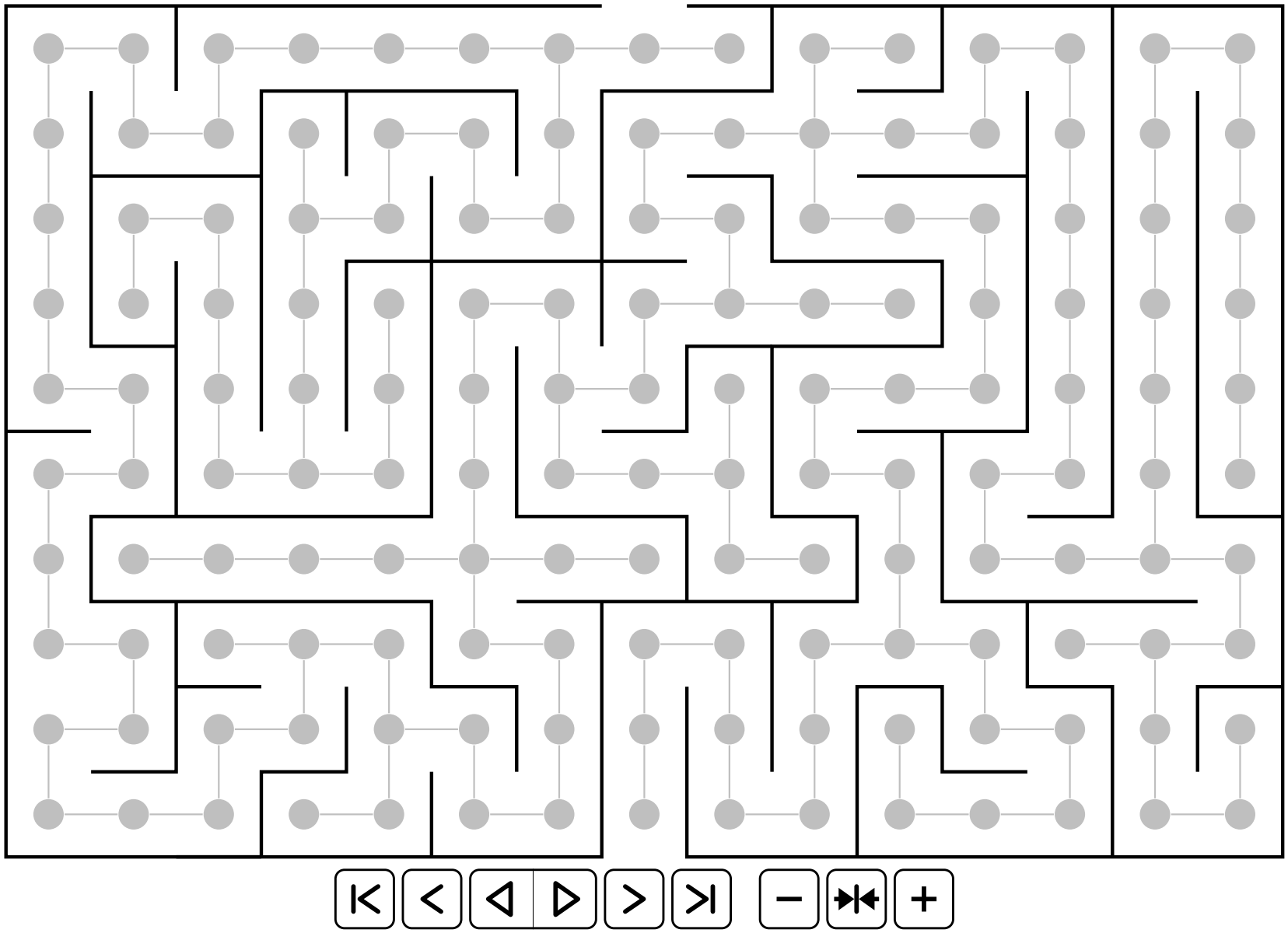
Hrany grafu:

šedá	hrana mezi neprozkoumanými vrcholy
žlutá	hrana incidentní s čekajícím vrcholem
červená	hrana incidentní s právě zpracovávaným vrcholem
modrá	hrana mezi zpracovanými vrcholy
zelená	hrana na cestě mezi vchodem a východem z bludiště
$u \rightarrow v$	$\pi[u] = v$

Animace průchodu grafem do hloubky

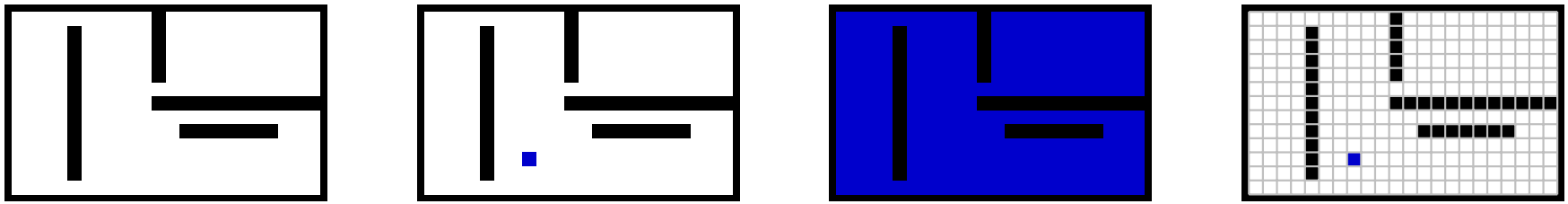


Animace průchodu grafem do hloubky



Počítačová grafika – vyplňování oblasti

- Zpracování rastrové grafiky – obrázek je tvořen pravoúhlou mřížkou pixelů.
- Oblast je ohraničena zvolenou barvou, například černou.
- Myší „ukážeme“ do zadané oblasti.
- Máme za úkol vyplnit zadanou oblast zvolenou barvou.



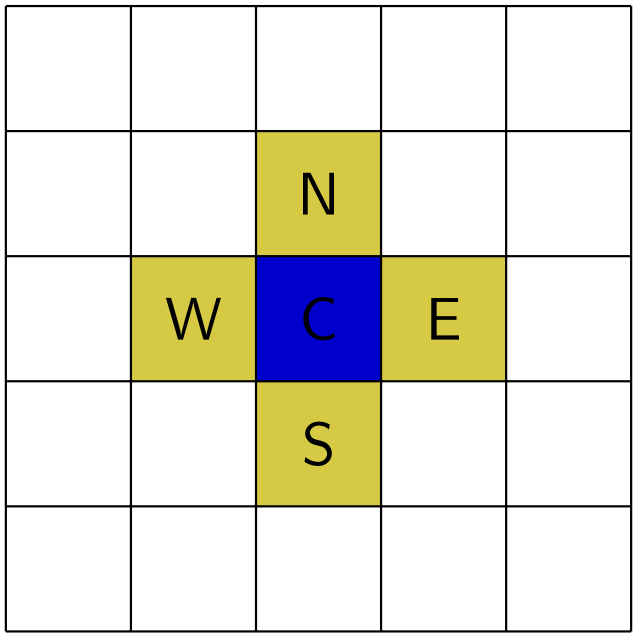
Příklady použití:

- interaktivní práce s grafickým editorem, úprava fotek atd.
- rasterizace vektorové grafiky, např. písmena v OpenType fontech jsou popsána obrysy, na tiskárně pak dochází k rozložení na pixely podle daného DPI a vyplnění obrysů.

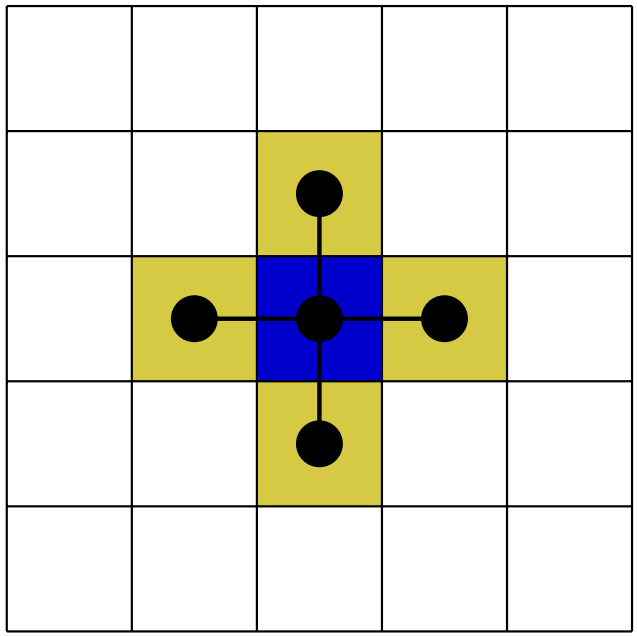
Řešení

1. převod rastru pixelů na graf – definice vrcholů a hran,
2. využití algoritmu průchodu grafem.

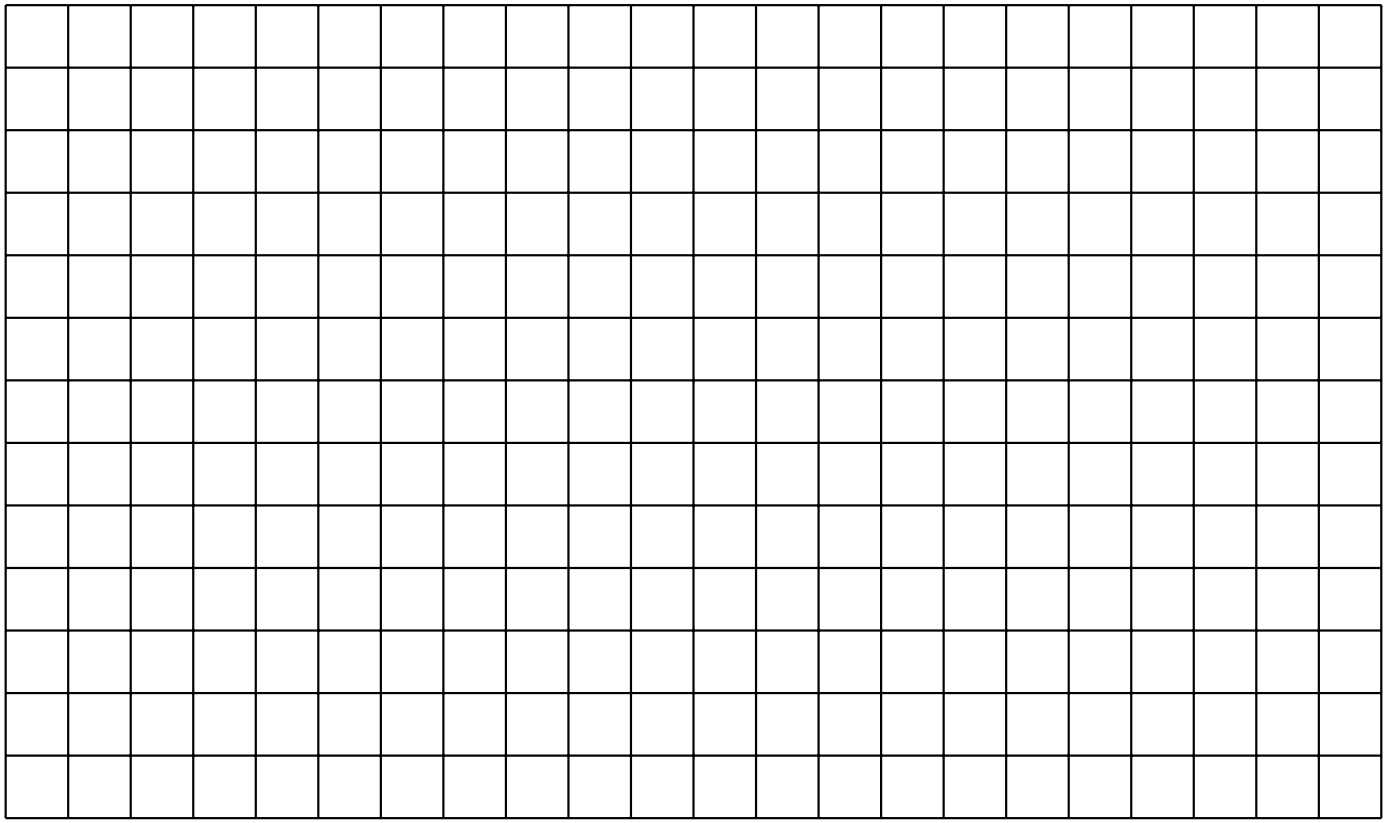
Rastr pixelů



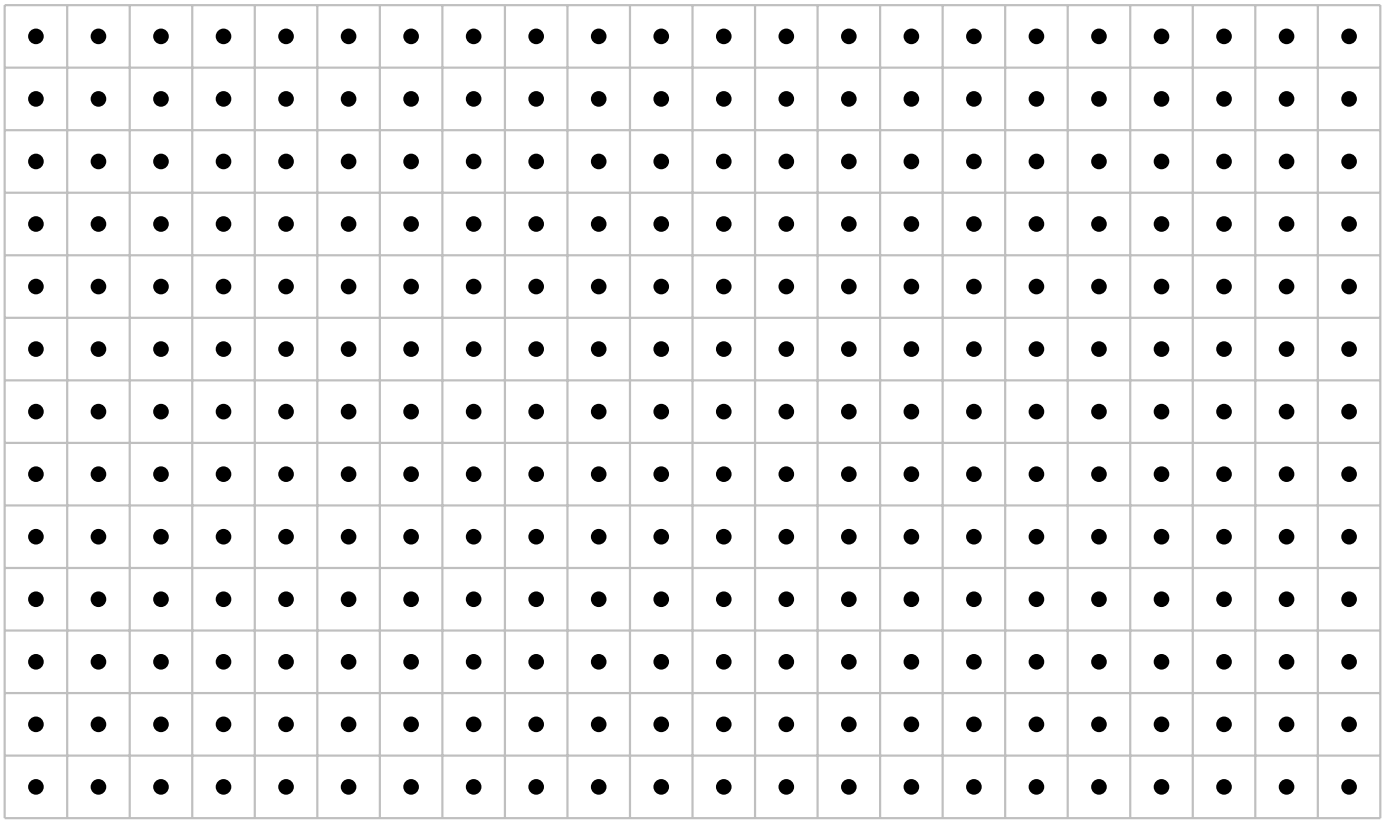
Grafová reprezentace



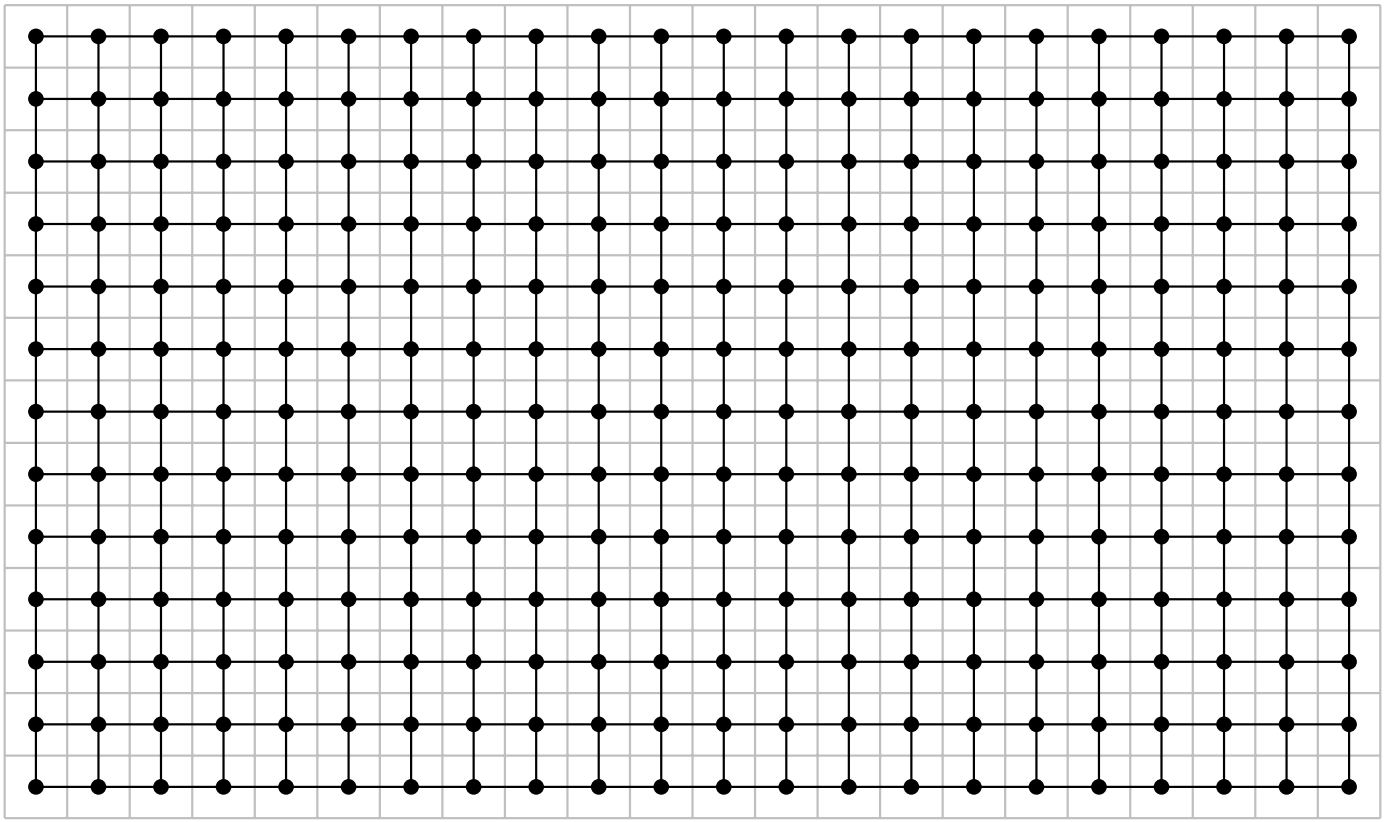
Počítačová grafika – vyplňování oblasti



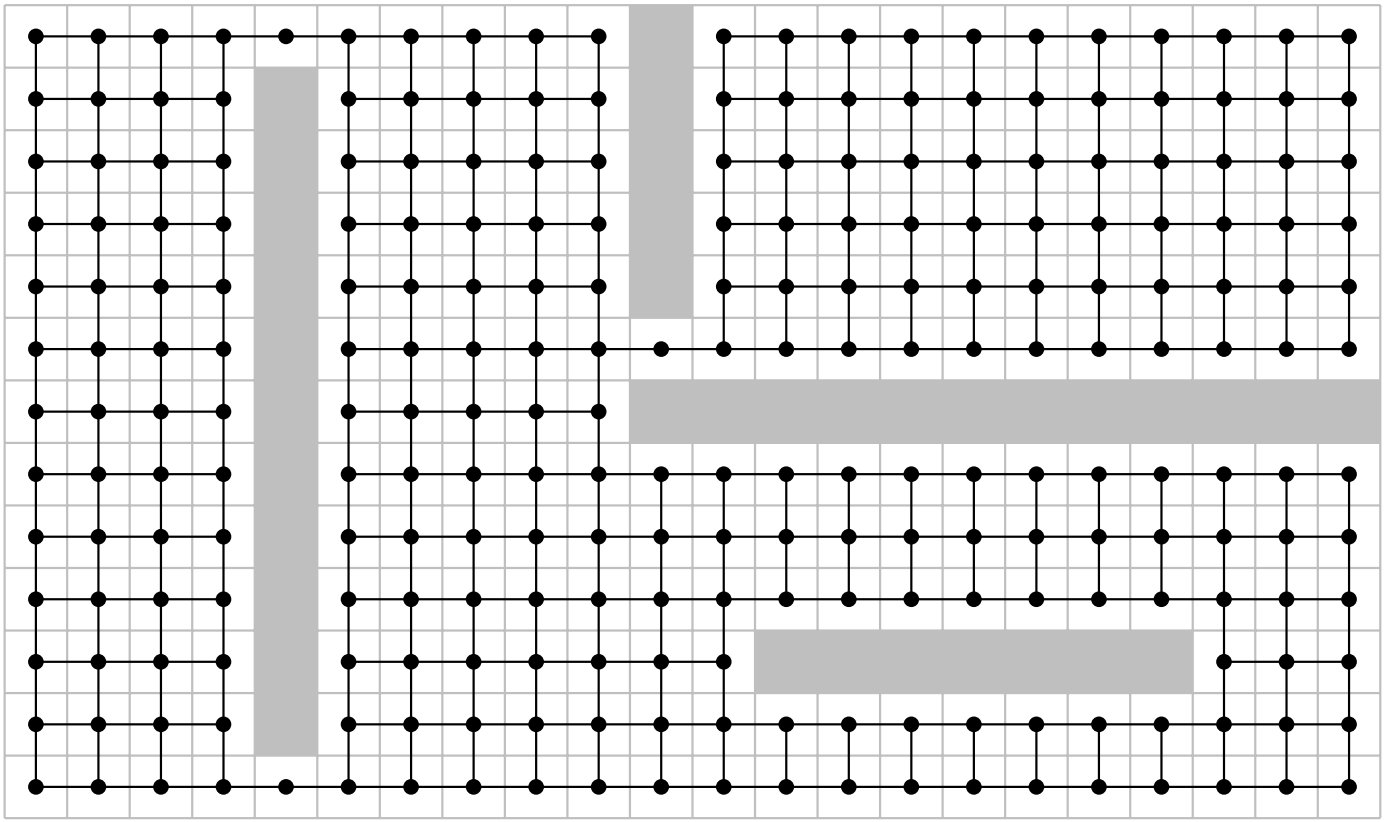
Počítačová grafika – vyplňování oblasti



Počítačová grafika – vyplňování oblasti



Počítačová grafika – vyplňování oblasti



Počítačová grafika – vyplňování oblasti

Varianty řešení:

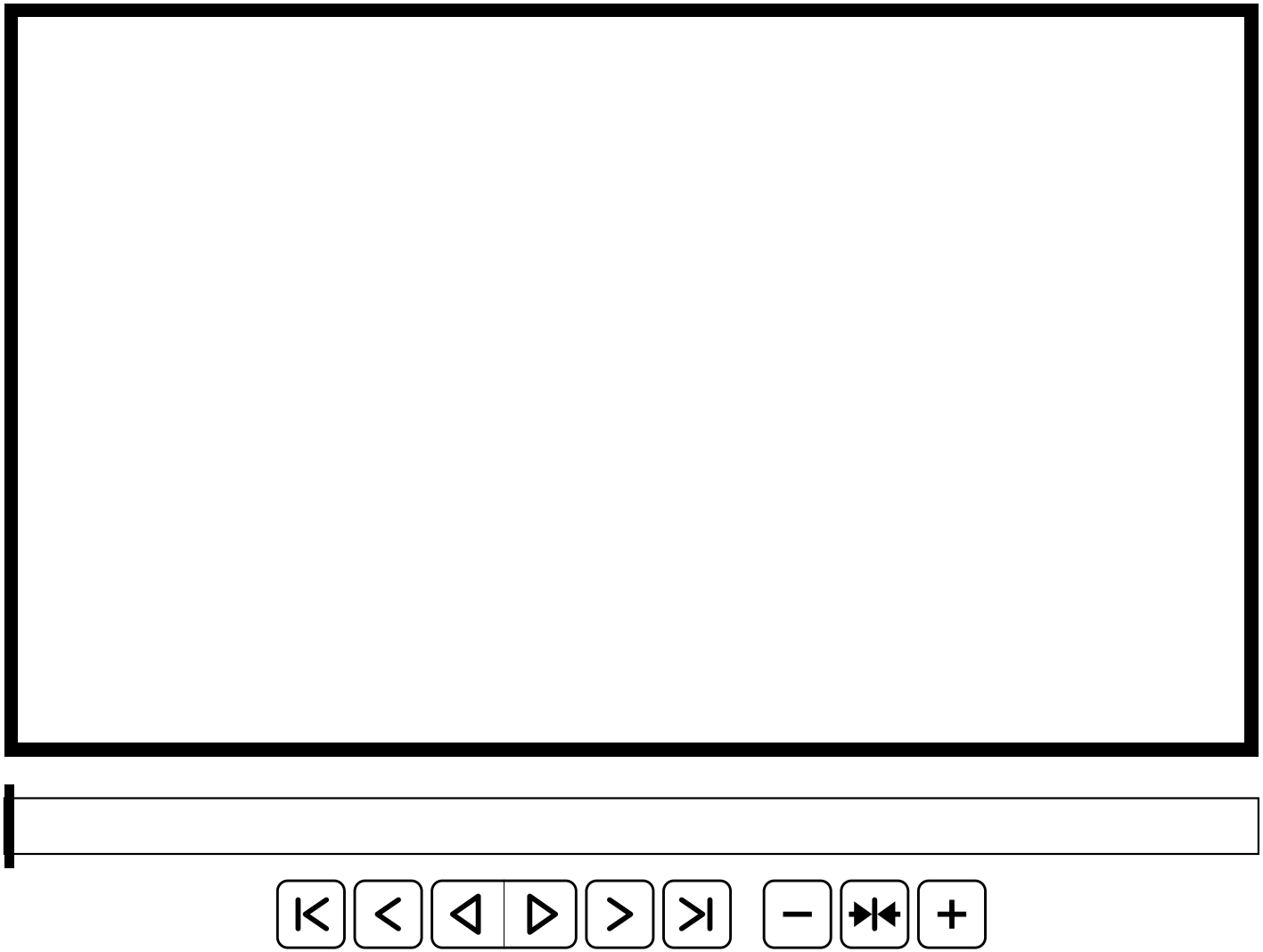
- algoritmus průchodu grafem:
  - průchod do šířky, pixely čekající na zpracování jsou ukládány do fronty,
  - průchod do hloubky, pixely čekající na zpracování jsou ukládány do zásobníku a
  - náhodný – pixely čekající na zpracování jsou ukládány do pomocné datové struktury na náhodné místo a z náhodného místa jsou vybírány.
- pořadí zpracování sousedů aktuálního pixelu:
  - N E S W,
  - N S E W,
  - náhodně.

Počítačová grafika – vyplňování oblasti

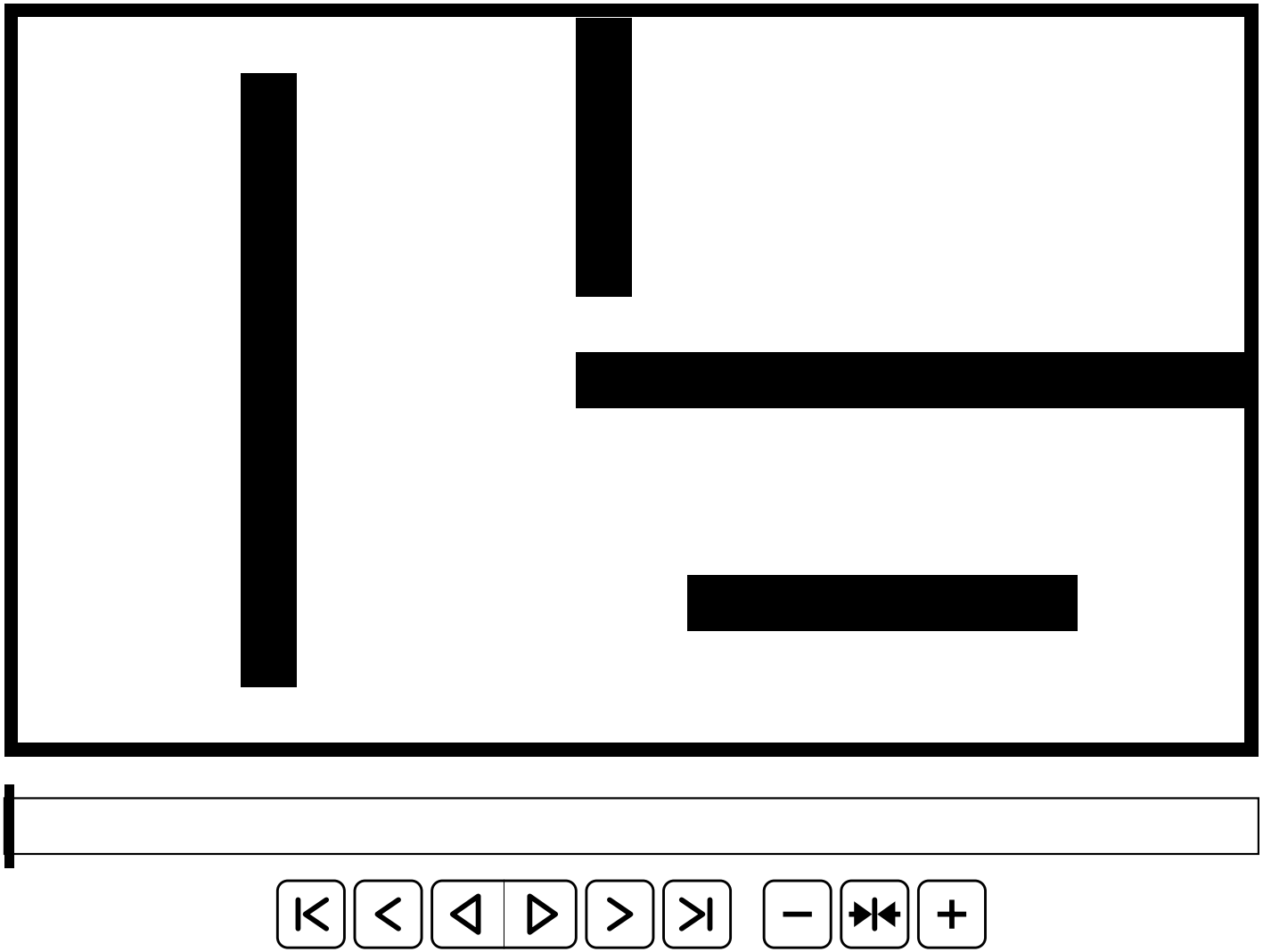
Legenda k animacím:

- algoritmy průchodu:
  - BFS – průchod do šířky,
  - DFS – průchod do hloubky,
  - Random – náhodný průchod.
- pořadí zpracování sousedů
  - N E S W,
  - náhodně.
- barva pixelů vyplňované oblasti:
  - bílá – dosud neprozkoumaný pixel,
  - žlutá – pixel čekající na zpracování,
  - červená – právě zpracovávaný pixel,
  - modrá – zpracovaný, vybarvený, pixel.
- Měřítko pod animací zobrazuje aktuální a maximální počet pixelů čekajících na zpracování v pomocné datové struktuře.

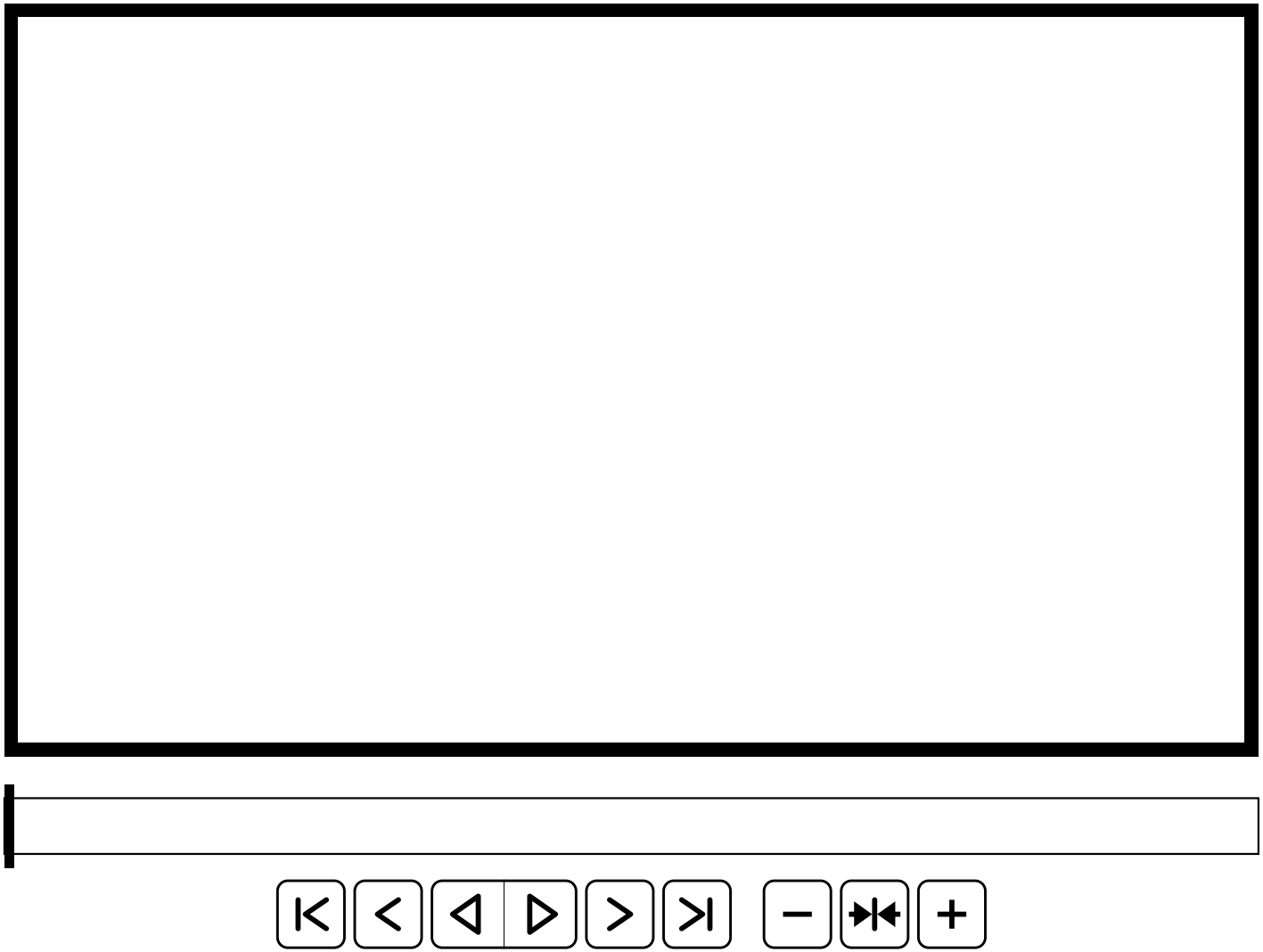
Animace vyplňování oblasti – BFS, NESW



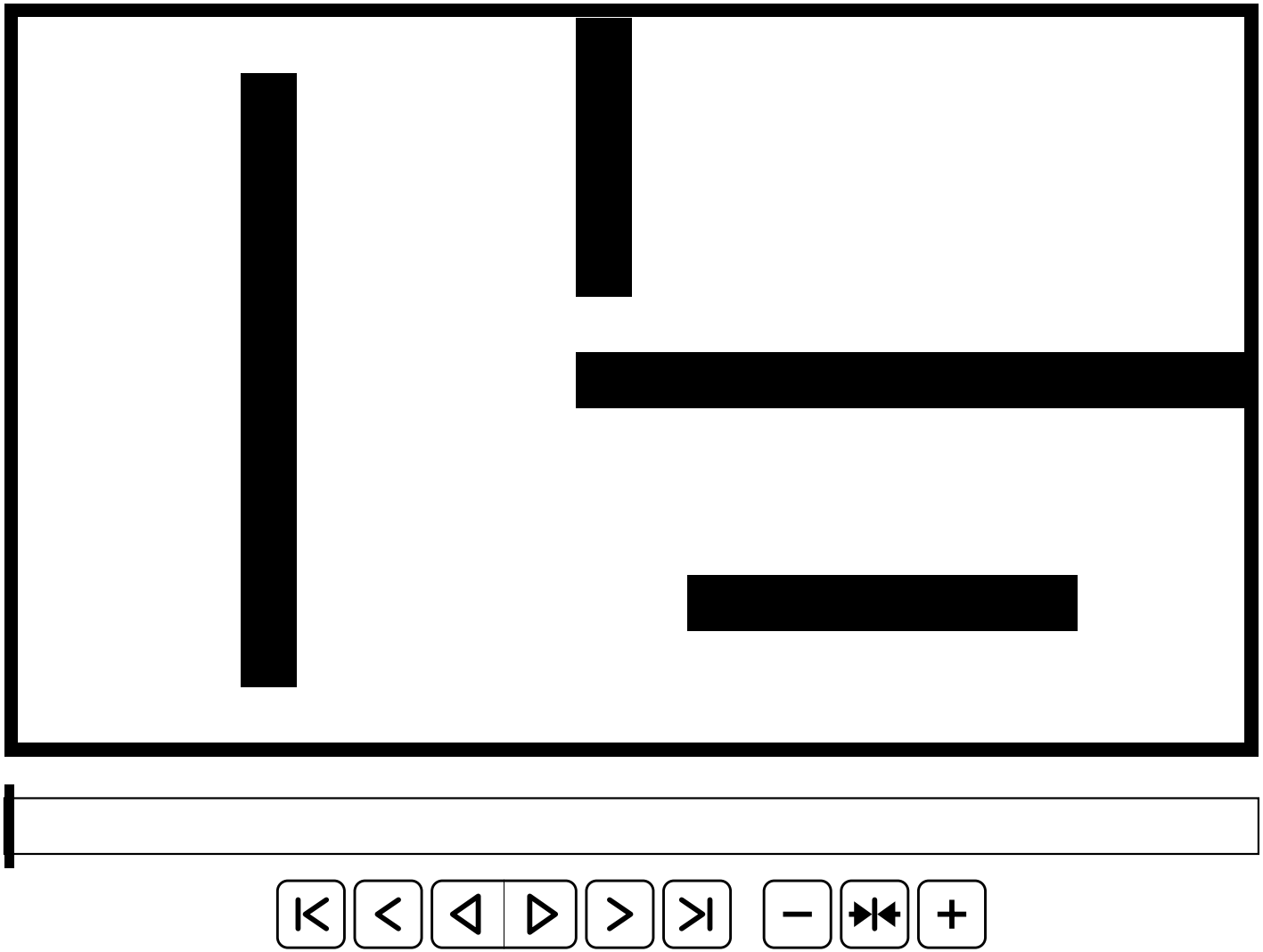
Animace vyplňování oblasti – BFS, NESW



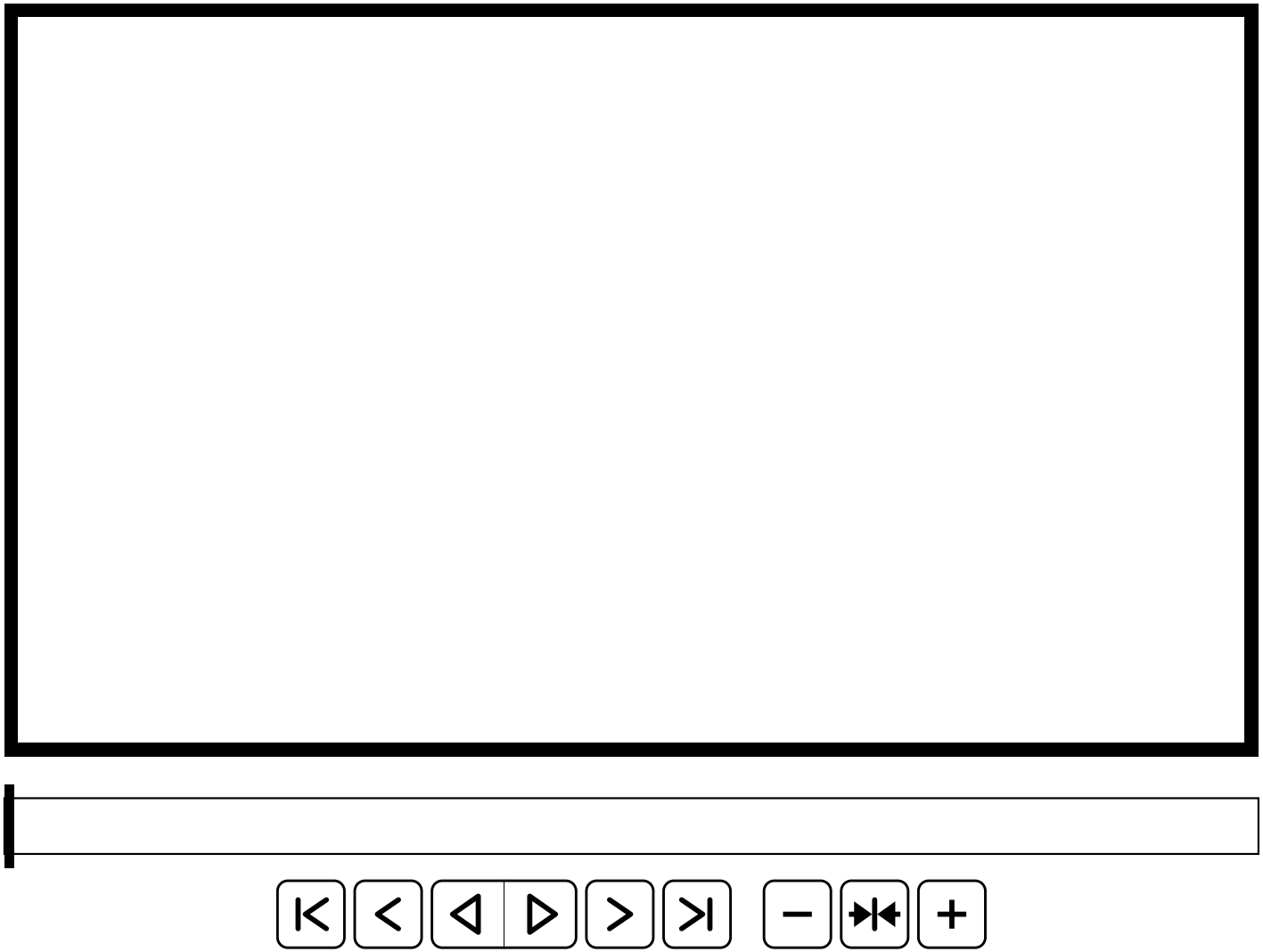
Animace vyplňování oblasti – DFS, NESW



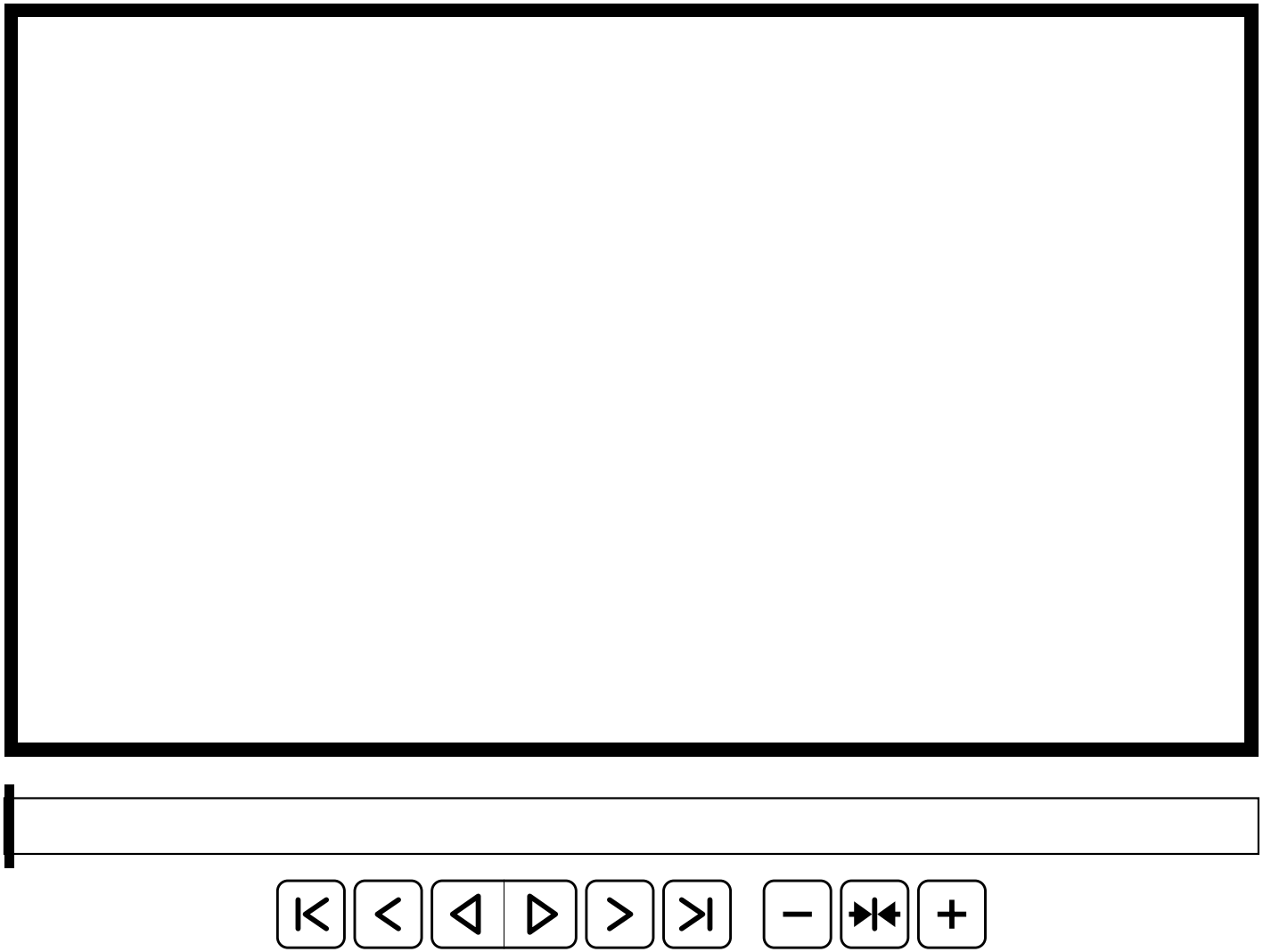
Animace vyplňování oblasti – DFS, NESW



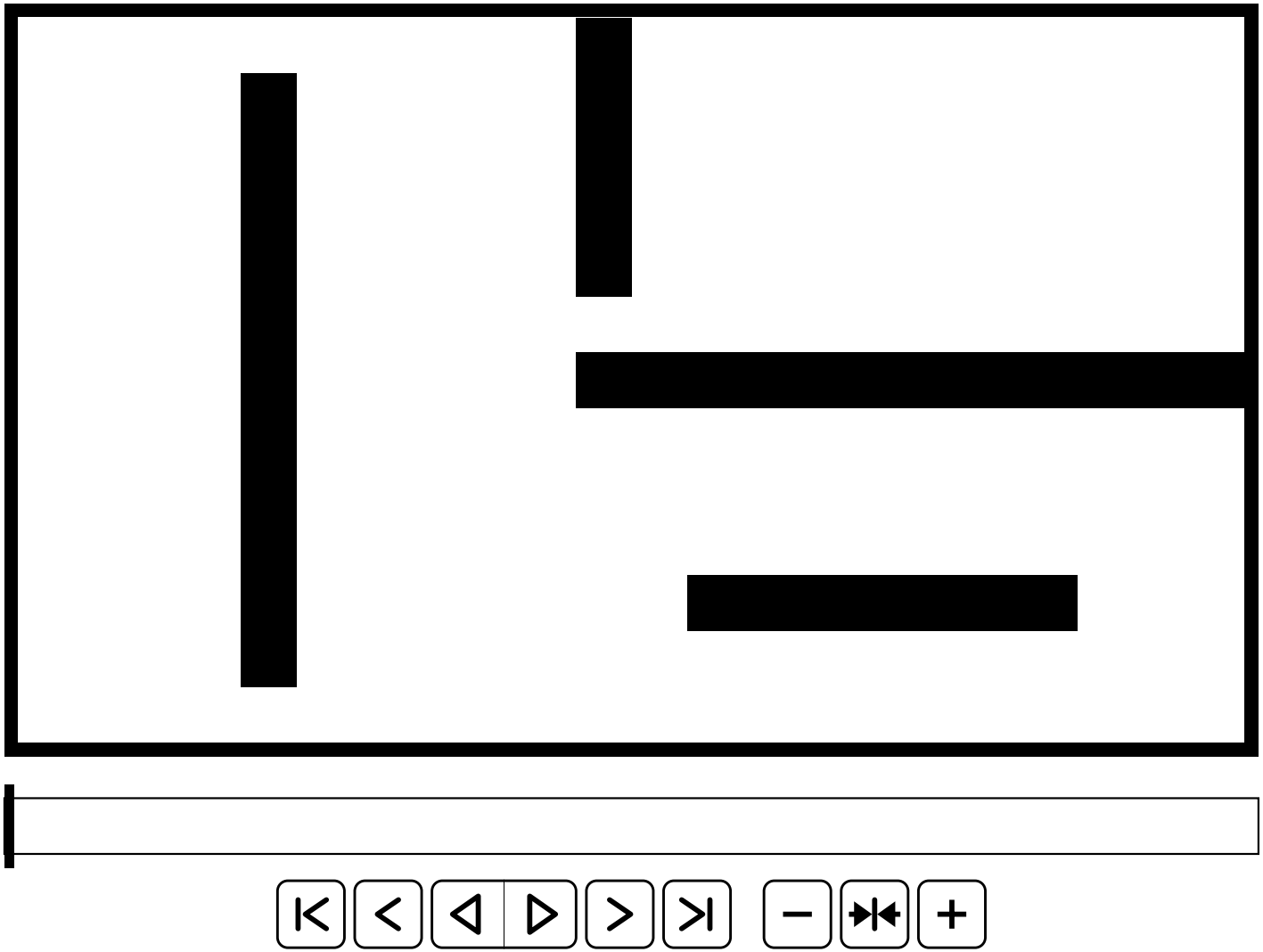
Animace vyplňování oblasti – BFS, Random



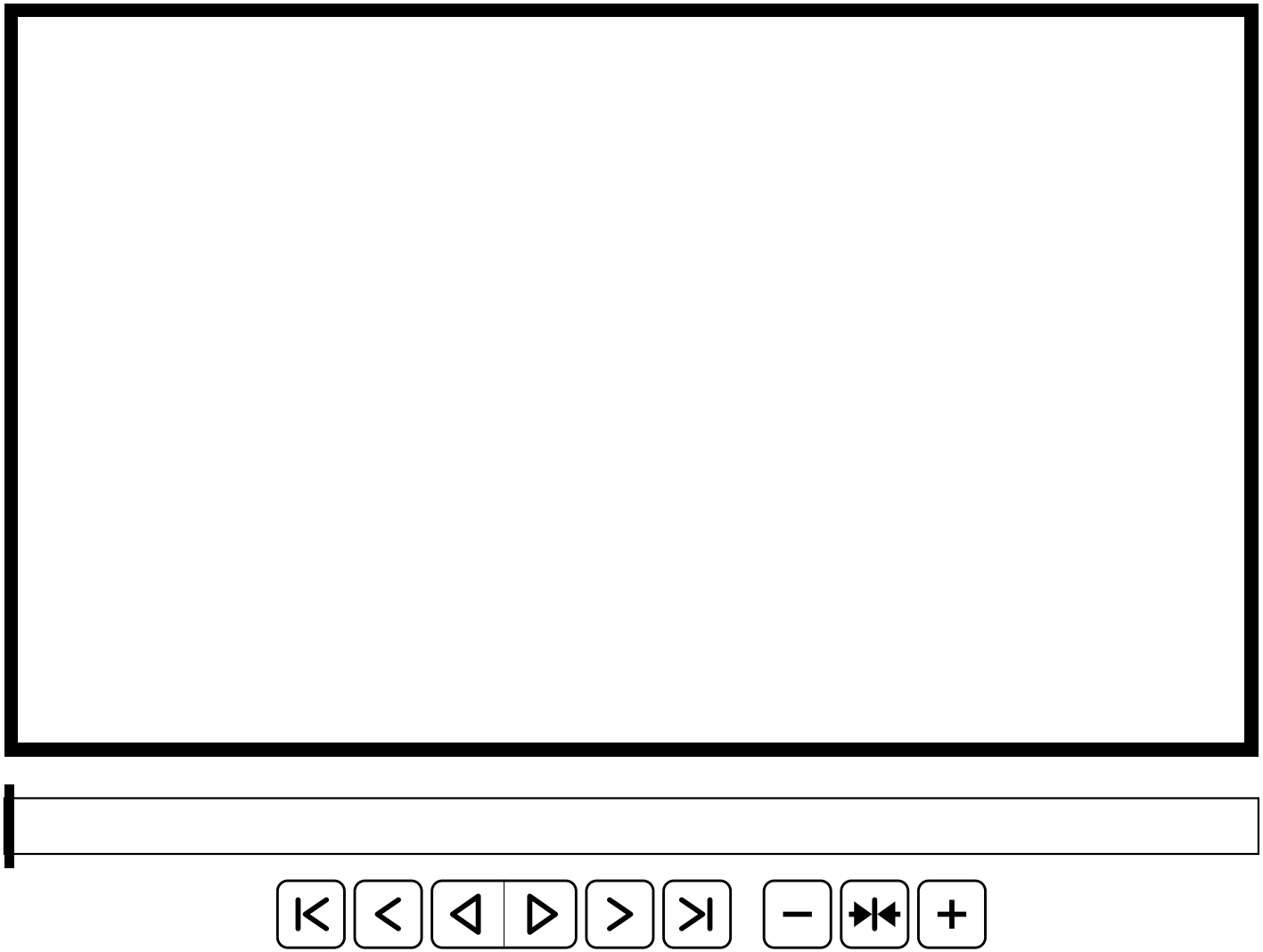
Animace vyplňování oblasti – DFS, Random



Animace vyplňování oblasti – DFS, Random



Animace vyplňování oblasti – Random, Random



Kontrolní otázky

1. Matice sousednosti grafu. Jaký je řád této matice? Je čtvercová? Jaký je význam prvků v matici?
2. Matice sousednosti grafu. Jak poznám, že graf je neorientovaný? Jak poznám, že graf neobsahuje smyčky?
3. Reprezentace grafu pomocí seznamu sousedních vrcholů. Jaké jsou výhody této implementace oproti matici sousednosti? Zaměřte se na operace jako je vložení nového vrcholu do grafu či paměťovou složitost obou reprezentací grafu.
4. Co je cílem algoritmů průchodu grafem?
5. Jaké tři algoritmy průchodu grafem znáte?
6. Popište obecný algoritmus značkování vrcholů.
7. V čem spočívá nevýhoda obecného značkovacího algoritmu? Co v jeho implementaci může zvyšovat časovou složitost?
8. Popište myšlenku algoritmu průchodu grafem do šířky (BFS).

Kontrolní otázky (pokrač.)

9. V algoritmu BFS se používají pro označení vrcholů tři barvy – bílá, šedá a černá. Jaký význam mají tato tři označení?
10. V jaké datové struktuře je při průchodu BFS udržována množina šedých vrcholů?
11. Jaký význam mají hodnoty $d[u]$ a $\pi[u]$ z algoritmu BFS?
12. Jak detekuji konec BFS algoritmu? Jak poznám, že jsem skončil?
13. Výstupem BFS je tzv. BF-strom. Jaké vrcholy tento strom obsahuje?
14. Mám dva vrcholy u a v v BF-stromu. Jaká je délka cesty mezi těmito dvěma vrcholy ze všech možných cest mezi těmito vrcholy v původním grafu? Nejkratší? Nejdelší? Průměrná?
15. Co je to průměr grafu?
16. Jaká je složitost BFS algoritmu?
17. Popište myšlenku algoritmu průchodu grafem do hloubky (DFS).

Kontrolní otázky (pokrač.)

18. DFS algoritmus přiřazuje každému vrcholu dvě tzv. časová razítka. Jaký mají význam?
19. Jak mohu, pomocí časových razítek, určit pro dva vrcholy vztah rodič-potomek v DF-stromu?
20. Jaká je složitost DFS algoritmu?
21. DFS lze implementovat i nerekurzivně? Pomocí jaké datové struktury mohu odstranit rekurzi?
22. Co je to kostra grafu?
23. Co je to dopředná a zpětná hrana?
24. Co je to topologické třídění?
25. Jak mohu detekovat v grafu cyklus?

Děkuji za pozornost